Semaine du 9 septembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Compléter et démontrer $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = ?$
2. Compléter et démontrer les formules trigonométriques d'additions suivantes :

$$\cos(a-b) = ? \text{ et } \sin(a-b) = ?$$

Solution:

1. Montrons $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ par double inclusion.
   * Considérons $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Alors x appartient à A ou à B. Supposons sans perte de généralité que $x \in A$. On a aussi que $x \notin A \cap B$. donc $x \notin B$, c'est à dire $x \in A \backslash B$, et donc $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
   * Considérons $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, supposons sans perte de généralité que $x \in (A \backslash B)$, alors x appartient à A mais n'appartient pas à B. C'est à dire que $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, ce qui revient à dire que $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
2. Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{i}, \vec{u}) = b$ et $(\vec{i}, \vec{v}) = a$. On sait alors que les coordonées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans ce repère sont respectivement $\vec{u} = (\cos(b), \sin(b))$ et $\vec{v} = (\cos(a), \sin(a))$. En particulière, en utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère on a :

   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

   Mais on a aussi que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires Or, par la relation de Chasles, on a :

   $$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}) = -(\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{i}, \vec{v}) = a - b$$

   Finalement on a donc :

   $$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

   On a $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ en utilisant la formule pour $\cos(a-b)$ et en se rappelant que $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Exercice n° 2 :

(Trigonométrie) :

1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante : trouver les $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\cos(3\theta) = \cos(\theta)$
2. Résoudre l'équation trigonométrique suivante : trouver les $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\sin(\theta) = \tan(\theta)$

Solution:

1. On utilise la propriété suivante : $\cos(p) = cos(q) \iff p = \pm q[2\pi]$
   Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) = \cos(\theta) &\iff 3\theta = \theta[2\pi] \text{ ou } 3\theta = -\theta[2\pi] \\ &\iff 2\theta = 0[2\pi] \text{ ou } 4\theta = 0[2\pi] \\ &\iff \theta = 0[\pi] \text{ ou } \theta = 0[\frac{\pi}{2}] \\ &\iff \theta = 0[\frac{\pi}{2}]\end{aligned}$$

   En effet, un multiple entier de π, est aussi un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$
   Ainsi θ est solution si, et seulement, si θ congru à $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ modulo 2π
2.

$$\begin{aligned}\sin(\theta) = \tan(\theta) &\iff \sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &\iff \frac{\sin(\theta)(\cos(\theta) - 1)}{\cos(\theta)} = 0 \\ &\iff \sin(\theta) = 0 \text{ ou } \cos(\theta) = 1 \text{ (et bien sûr } \cos(\theta) \neq 0) \\ &\iff \sin(\theta) = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

   Ainsi les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les $x \in \pi\mathbb{Z}$

Exercice n^{o} 3 :

(Sommes) : Donnez une expression simple des sommes suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i, j)$$

Solution:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\
&= \sqrt{n+1}-\sqrt{1} = \sqrt{n+1}-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \min(i,j) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \min(i,j) + \sum_{i=i+1}^{n} \min(i,j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=j+1}^{n} j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j(j+1)}{2} + j \times (n-j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(j\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{j^2}{2} \right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(2n+1)n(n+1)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Semaine du 9 septembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal
2. Donnez la formule trigonométrique de transformation d'une somme en produits suivante et prouvez la :
$$\cos(p) + \cos(q) = ?$$

Solution:

1. Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n-1$, on a
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$
2. On a d'une part :
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ et } \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
Donc en effectuant la somme des deux égalites, on a $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$.
En posant $p = a+b$ et $q = a-b$, on a donc que $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, ainsi en remplaçant, on obtient
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

Exercice n° 2 :

(Trigonométrie) :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin(x) + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = 0$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur $I = [0, 2\pi]$, l'équation trigonométrique suivante : $\cos(2x) = \cos(x)^2$

Solution:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, On utilise les formules d'additions trigonométriques, on a :

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3}) = \sin(x)\cos(\frac{2\pi}{3})-\sin(\frac{2\pi}{3})\cos(x) \text{ et } \sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin(x)\cos(\frac{2\pi}{3})+\sin(\frac{2\pi}{3})\cos(x)$$

et les valeurs suivantes : $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$
En regardant la somme des trois termes, on obtient une somme nulle d'où l'égalité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a que $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$. Donc notre équation trigonométrique revient à résoudre l'équation $\cos(2x) = 1$.

$$\begin{aligned} \cos(2x) = 1 &\Longleftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Une autre manière de résoudre est cette fois d'écrire dans l'autre sens $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$. Notre équation revient à résoudre l'équation $\cos(x)^2 = 1$, c'est à dire $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Donc $x \in \pi\mathbb{Z}$. En restreignant sur $I = [0, 2\pi]$, on a que les solutions sont $\{0, \pi, 2\pi\}$

Exercice n^o 3 :

(Sommes) : Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$$

Solution:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on étudie tout d'abord le terme de la somme :

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}\\
&= \frac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}\\
&= \frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k^2+k+1)}{k(k+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k(k+1)}+\frac{k+1}{k(k+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1-1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)\\
&= n-\frac{1}{n+1}+1\\
&= \frac{n^2+2n}{n+1}
\end{aligned}$$

Semaine du 9 septembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer la formule du binome de Newton.
2. Donnez sans démonstration trois expressions de $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

Solution:

1. On souhaite montrer par réccurence que : Pour tout réels (a, b) et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Pour se faire, on pose le prédicat $P(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$" $n = 0$: évident. Supposons que le résultat soit vérifié jusqu'au rang n ($P(n)$) et vérifions $P(n+1)$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre $P(n+1)$ et ce qui achève donc la récurrence.

2. $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

Exercice n° 2 :

(Trigonométrie) :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation trigonométrique suivante : $\cos^2(x) \geq \cos(2x)$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, \pi]$, l'équation trigonométrique suivant : $\tan(5x) = 1$

Solution:

1. Pour cela, on utilise la formule : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. Ainsi

$$\begin{aligned}\cos^2(x) \geq \cos(2x) &\iff \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geq \cos(2x) \\ &\iff 1 - \cos(2x) \geq 0\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(2x) \leq 1$, donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

2. Par ci-dessous, on obtient $S_{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$ et $S_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\}$

$$\begin{aligned}\tan(5x) = 1 &\iff 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \\ &\iff x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Exercice n° 3 :

(Ensembles) : Soient E un ensemble, et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Les 3 questions sont indépendantes

1. Montrer que
$$(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$$
2. Montrer que
$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap B^c = A \cap C^c$$

Solution:

1. On a par distributivité de $\cap$ sur $\cup$ que
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$
car $A \cap C \subseteq A$.
2. Proposons deux méthodes : une par les ensembles globalement, puis une seconde par les éléments.

* Par les ensembles globalement : (en utilisant que $A \cap A^c = \varnothing$ et que $A \cup \varnothing = A$)

$$\begin{aligned} A \cap B = A \cap C &\Longleftrightarrow (A \cap B)^c = (A \cap C)^c \\ &\Longleftrightarrow A^c \cup B^c = A^c \cup C^c \\ &\Longrightarrow A \cap (A^c \cup B^c) = A \cap (A^c \cup C^c) \\ &\Longleftrightarrow (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap C^c) \\ &\Longleftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c \end{aligned}$$

On a donc montré la première implication, et la deuxième est vérifié en prenant la première avec (B^c, C^c) à la place de (B, C)

* Par les éléments : On suppose tout d'abord que $A \cap B = A \cap C$ et on considère $x \in A \cap B^c$, alors $x \in A$ et $x \notin B$, supposons par l'absurde que $x \in C$ alors $x \in A \cap C = A \cap B$ donc $x \in B$ ce qui impose une contradiction. D'où $x \in C^c$ et donc $x \in A \cap C^c$. Par rôle symétrique de B et C, on a l'autre inclusion d'où l'égalité.
L'autre implication est immédiate en faisant le même raisonnement avec (B^c, C^c) à la place de (B, C).

Semaine du 9 septembre - Exercices supplémentaires

Exercice n° 1 :

(Ensembles) : Montrer que si on considère E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}$, on a :

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$$

Exercice n° 2 :

(Ensembles) : Montrer que si on considère E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}$, on a :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup B^c = A \cup C^c$$

Exercice n° 3 :

(Sommes) : Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$$

Exercice n° 4 :

(Sommes) : Calculer la somme suivante :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} 2^{i+j}$$