Semaine du 9 Décembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Montrer que si f est continue et injective sur un intervalle I alors f est strictement monotone sur I.
2. Énoncer et démontrer la proposition de dérivation d'une composée.

Exercice n° 2 :

(Continuité) : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que l'application $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice n° 3 :

(Continuité et dérivation) : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable ne s'annulant pas. On appelle dérivée logarithmique de f,la fonction $\frac{f'}{f}$.

1. Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables ne s'annulant pas. Déterminer la dérivée logarithmique de $f^p g^q$ où $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.
2. Lorsque f et g sont à valeurs réelles strictement positives, déterminer la dérivée logarithmique de $f^\alpha g^\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
3. Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = (1 - x)^{\frac{3}{4}} x^{\frac{2}{3}}$. À l'aide de la dérivée logarithmique, étudier les variations de φ.

Semaine du 9 Décembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les proposition suivantes :

1. Théorème de dérivation des bijections réelles.
2. Dérivation d'un produit

Exercice n° 2 :

(Continuité) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction continue. Montrer que f est constante.

Exercice n° 3 :

(Continuité et dérivation) : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

1. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, puis dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que l'intervalle $[1, e]$ est stable par f. En déduire l'existence d'un unique point fixe a pour f dans $[1, e]$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1)$ puis en déduire la limite de u_n.

Semaine du 9 Décembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes

1. Théorème de Rolle.
2. Théorème de la limite dérivée.

Exercice n° 2 :

(Continuité) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f possède un minimum.

Exercice n° 3 :

(Continuité et dérivation) : Soit I un intervalle et $f : I \to I$ une fonction dérivable et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$. On suppose de plus que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c et que $|f'(c)| > 1$.

1. On suppose que pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq c$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-c}{u_n-c}$ et aboutir à une contradiction.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, égale à c à partir d'un certain rang.
3. Démontrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ diverge.