Semaine du 16 Décembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Homogénéité du PGCD.

Exercice n° 2 :

(Arithmétique dans $\mathbb{Z}$) : Soient a et b des entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que ab soit une puissance n-ème d'entier ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que a et b sont des puissances n-èmes d'entiers.

Exercice n° 3 :

(Arithmétique et réels) :

1. Montrer que si le carré d'un nombre entier p est multiple de 5 alors le nombre p lui-même est multiple de 5.
2. Montrer que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel.
3. On pose $A = \{x \in \mathbb{Q}, \sqrt{5} \leq x\}$. Est-ce que $\sqrt{5} \in A$?
4. Quelle est la bornée inférieure de A ? Justifier.
5. L'ensemble A a-t-il un plus petit élément ? Justifier.

Semaine du 16 Décembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. $\mathbb{R}$ est archimédien.

Exercice n° 2 :

(Arithmétique dans $\mathbb{Z}$) : Soient r un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \ldots, a_r$ des entiers relatifs. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on pose

$$b_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} a_j$$

Montrer que les a_i sont premiers entre eux deux à deux si et seulement si les b_i sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Exercice n° 3 :

(Réels) : Soient A, B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ tels que A et B soient bornées et $A \cap B \neq \varnothing$

1. Montrer que $A \cap B$ est bornée.
2. Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.
3. Supposons que $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$.
   a) Calculer $\sup(A \cap B)$ et $\min(\sup A, \sup B)$
   b) Est ce que $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$?
   c) Calculer $\inf(A \cap B)$ et $\max(\inf A, \inf B)$.
   d) Est ce que $\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$?
4. Que peut-on en déduiré ?

Semaine du 16 Décembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Densité dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Exercice n° 2 :

(Arithmétique dans $\mathbb{Z}$) : Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égal au produit de deux nombres premiers.

Exercice n° 3 :

(Réels) : Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, c.à.d qu'il n'existe aucune bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$. Pour cela, on va supposer par l'absurde qu'il existe une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$. Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}$. On pose

$$\tilde{S} = \left\{ \sum_{x \in A} \frac{1}{2^{f(x)}}, A \text{ partie non-vide finie de } S \right\}$$

1. Montrer que $\tilde{S}$ admet une borne supérieur et que $0 < \sup(\tilde{S}) \leq 2$.
2. On pose $m(S) = \sup(\tilde{S})$ et $E = \{x \in \mathbb{R}, m(]-\infty, x[) > x\}$. Montrer que E admet une borne supérieure.
3. On pose $c = \sup(E)$, montrer que $0 < c$.
4. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $y > c - \frac{1}{2^{f(c)}}$ et $y > 0$.
5. Montrer que $y + \frac{1}{2^{f(c)}} \in E$.
6. Conclure.