Semaine du 16 Décembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Donnez un énoncé et une preuve décrivant l'intégrité de $K[X]$
2. Donner un énoncé et une preuve de la division euclidienne (existence et unicité).

Exercice n° 2 :

(Polynômes) : Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer, en fonction de $\deg(P)$, le degré du polynôme : $P(X+1) - P(X)$.

Exercice n° 3 :

(Polynômes) : Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un polynôme réel de degré n. On dit que ce polynôme est réciproque lorsque pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a $a_i = a_{n-i}$.

1. Montrer que le polynôme P est réciproque si, et seulement si, $X^n P(\frac{1}{X}) = P(X)$
2. On suppose que P est un polynôme réciproque. Montrer que si x est une racine de P alors $x \neq 0$ et $\frac{1}{x}$ est aussi racine de P de même multiplicité.
3. Vérifier que si P est un polynôme réciproque de degré pair $n = 2p$ alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = X^p Q(X + \frac{1}{X})$
4. Vérifier que si P est un polynôme réciproque de degré impair $n = 2p+1$ alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X+1)X^p Q(X + \frac{1}{X})$.

Semaine du 16 Décembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Donner un énoncé et une preuve sur le degré du produit de deux polynômes.
2. Donner une caractérisation de l'ordre d'une racine à l'aide des dérivées. (et le prouver)

Exercice n° 2 :

(Polynômes) : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \overline{z}$.

Exercice n° 3 :

(Polynômes) : On souhaite déterminer les angles appartenant à $2\pi\mathbb{Q}$ dont le cosinus est rationnel.

1. Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Factoriser $\cos((n+1)\theta) + cos((n-1)\theta)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$
3. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que les racines rationnelles de P sont en fait entières.
4. Soit $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Déterminer les valeurs possibles de $\cos(\theta)$ ainsi que celles de θ.
5. Même question en remplaçant cos par sin.
6. Même question en remplaçant cos par tan.

Semaine du 16 Décembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Montrer qu'une racine complexe d'un polynôme réel et son conjugué ont même ordre de multiplicité.
2. Énoncer et prouver le théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice n° 2 :

(Polynômes) : Montrer que la fonction sin n'est pas polynômiale.

Exercice n° 3 :

(Polynômes) : Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul tel que $P(X^2) = P(X+1)P(X)$.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, a^{2^n}$ est une racine P.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P (s'il en existe). Montrer que a est une racine de l'unité.
3. Les racines de P sont-elles toutes nécessairement des racines de l'unité ?
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que la seule racine non nulle possible pour P est 1.
5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X+1)P(X)$.