Semaine du 06 Janvier - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Démontrer la divergence de la série harmonique : la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

Exercice n° 2 :

(Suites particulières) : Expliciter le terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, 3u_{n+1} = 12u_n + 18$$

Exercice n° 3 :

(Suites) : Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente.
3. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.
4. En déduire que la réciproque à la question 1 est vraie.

Semaine du 06 Janvier - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la densité.

Exercice n° 2 :

(Suites particulières) : Expliciter le terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et pour tout } n \geq 2, 4u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$$

Exercice n° 3 :

(Suites) : (Théorème de Césaro) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{C}$, alors $\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
3. La réciproque à la question 2 est elle vraie ?

Exo Suppléméntaires

Exercice n° 1 :

(Suites) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite dont les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Question bonus : ce résultat persiste-il si on ne suppose la convergence que des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Exercice n° 2 :

(Suites) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée.

1. Montrer que
$$\forall (M,N) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N+1 \text{ et } u_n \geq M$$
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que la construction de la question précédente peut être affinée pour prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.