Semaine du 13 Janvier - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer la formule de Taylor Young.

Exercice n° 2 :

(Calcul de développements limités) : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{1+x}$$

Exercice n° 3 :

(DL et applications) : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Determiner la limite de f en $+\infty$.
4. Étudier les variations de f.
5. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
6. Déterminer le développement limité a l'ordre 3 en 1 de f.
7. Préciser l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de T et $\mathcal{C}$ au voisinage du point d'abscisse 1.
8. Tracer $\mathcal{C}$ avec soin. On placera notamment la tangente T déterminée a la question précédente.

Semaine du 13 Janvier - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Caractérisation d'une base par l'existence et l'unicité des coordonnées.
2. Montrer que $(\mathrm{id}, \exp, \cos)$ est libre.

Exercice n° 2 :

(Calcul de développements limités) : Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de

$$f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$$

Exercice n° 3 :

(DL et applications) : On cherche a déterminer le comportement au voisinage de 0 de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) = \frac{1}{\arcsin(x)} - \frac{1}{x}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Prouver que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement dans la suite.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Étudier la position relative du graphe de f et de sa tangente au voisinage de l'origine.

Semaine du 13 Janvier - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Démontrer les résultats suivants :

1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.
3. L'image d'une base par une application linéaire bijective est une base.

Qu'en est-il des résultats réciproques ? (à l'oral).

Exercice n° 2 :

(Calcul de développements limités) : Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de

$$f(x) = \sqrt{e^x + \cos(x)}$$

Exercice n° 3 :

(DL et applications) : Considérons la fonction suivant $f : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{1-\cos(2x)}$

1. Donner l'ensemble de définition de f puis déterminer sa sa periode.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas en π.
3. Démontrer que le prolongement par continuité de f est derivable en 0 et donner son nombre dérivée, ainsi que la position de sa courbe représentative par rapport a sa tangente.