# Semaine du 20 Janvier - Planche n° 1

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Lemme de la base extraite/incomplète.
2. Théorème de la base extraite.

**Exercice n° 2 :**

(Bases en dimension finie) : Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de $E$.

**Exercice n° 3 :**

(Noyaux itérés) : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $\ker(u^{p+1}) = \ker(u^p)$.
   Dans la suite, on considère un tel indice $p$.
2. Montrer que :
   $$\forall k \geq p,\ \ker(u^k) = \ker(u^p) \text{ et } \mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p)$$
3. Montrer que $E = \ker(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

# Semaine du 20 Janvier - Planche n° 2

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Formule de Grassmann.
2. Théorème de la base incomplète.

**Exercice n° 2 :**

(Hyperplans) : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ supérieure à 2. Soit $H_1$ et $H_2$ deux hyperplans de $E$ distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels et rang) : Soit $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que : $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v \circ u) + \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \ker(v))$.
   *Indication : On pourra appliquer la formule du rang à l'endomorphisme $v$ restreint à un bon espace..*
2. En déduire que $\mathrm{rg}(v \circ u) \geq \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u) - \dim(F)$.
3. Montrer que $\dim(\ker(v \circ u)) \leq \dim(\ker(v)) + \dim(\ker(u))$.

# Semaine du 20 Janvier - Planche n° 3

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer le lemme et la formule du rang.

**Exercice n° 2 :**

(Espaces vectoriels) : Soient $U, V$ et $W$ trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

1. On suppose $\dim(U) + \dim(V) > n$. Montrer que $U \cap V$ n'est pas réduit au vecteur nul.
2. On suppose $\dim(U) + \dim(V) + \dim(W) > 2n$. Que dire de l'espace $U \cap V \cap W$ ?

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels et rang) : Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
2. Démontrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$.
3. Démontrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Rightarrow E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.