Semaine du 10 Février - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Formule de Taylor avec reste intégrale.
2. Formule pour la transposition d'un produit de matrices.

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M^2 est une combinaison linéaire de M et de I_3.
2. En déduire que si $-a^2 - a + 2 \neq 0$, alors M est inversible et précisér M^{-1}.
3. En discutant selon la valeur de a, résoudre le système $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 3 :

(Divers) : Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Rappeler le théorème de Heine.
2. Déterminer la limiter de la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Semaine du 10 Février - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Les sommes de Riemann associées à f convergent vers l'intégrale de f sur $[a, b]$ si f est continue sur $[a, b]$.
2. L'inverse de la transposée est égale à la transposée de l'inverse.

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice $\begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tous réels t_1, t_2, on a $M(t_1)M(t_2) = M(t_1 + t_2)$.
2. Montrer que pour tout réel t, $M(t)$ est inversible et préciser son inverse.
3. Que peut-on dire de l'ensemble $\{M(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 3 :

(Intégration) : Calculer la limite suivante

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n + k^2}{n^3 + k^3}$$

Semaine du 10 Février - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions précédentes :

1. Lemme technique pour la méthode des trapèzes
2. $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Exercice n° 2 :

(Matrices) : Soient $m \in \mathbb{R}^*$. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ m^{-1} & 0 & m \\ m^{-2} & m^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire $(A+I_3)(A-2I_3)$.
2. On pose $B = \frac{1}{3}(A+I_3)$ et $C = \frac{1}{3}(A-2I_3)$. Préciser B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire A^n en fonction de B, C et de $n \in \mathbb{N}^*$. (Ce résultat persiste pour $n = 0$? $n = -1$?)

Exercice n° 3 :

(Intégration) : Calculer la limite suivante

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{p=1}^{n} \left(n^2 \times p^{-\frac{4p}{n^2}} \right)$$