Semaine du 17 Février - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. $\text{mat}_{f,g}(v) \cdot \text{mat}_{e,f}(u) = \text{mat}_{e,g}(v \circ u)$
2. X est une base de E si et seulement si $\text{mat}_e(X)$ est inversible.

Exercice n° 2 :

(Matrices et applications) : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. Et montrer que la concaténation de celles-ci forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans la base de la question précédente.

Exercice n° 3 :

(Représentation matricielle) : On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\phi(P(X)) = P(X+1) + P(X)$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On notera M cette matrice.
3. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. En déduire que l'équation $P(X+1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$ admet une unique solution $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et donner cette solution.

Semaine du 17 Février - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. $\mathrm{mat}_{e,f}(u) \cdot \mathrm{mat}_e(x) = \mathrm{mat}_f(u(x))$
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors le rang de A est le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ formée par les p colonnes de A.

Exercice n° 2 :

(Matrices et applications) : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On pose $\varepsilon_1 = (1,1,0)$; $\varepsilon_2 = (1,0,1)$ et $\varepsilon_3 = (1,1,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer une base de $\ker(A)$ et une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice n° 3 :

(Représentation matricielle) : Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant, pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Montrer f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 3$, donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer ensuite pour n quelconque, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f pour $n \geq 3$. Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \text{ et } P(0) = P'(0) = 0$$

Semaine du 17 Février - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{mat}_{e,f}(u)$ est inversible.
   Dans ce cas, $[\mathrm{mat}_{e,f}(u)]^{-1} = \mathrm{mat}_{f,e}(u^{-1})$
2. $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathrm{mat}_{e,f}(u))$.

Exercice n° 2 :

(Matrices et applications) : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_2, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on pose :

$$u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \text{ et } u_2 = e_1 + e_4$$

1. Expliquer pourquoi (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base (u_3, u_4) du noyau de f.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ défini par :

$$\forall u \in \mathrm{Im}(f), \tilde{f}(u) = f(u).$$

Déterminer la matrice de $\tilde{f}$ dans la base (u_1, u_2).

Exercice n° 3 :

(Représentation matricielle) : Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 et f l'application définie sur E par $f(P) = P + P'$

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E. Déterminer la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.
3. Établir que f est un automorphisme de E.
4. En déduire la solution P de $P + P' = X^2 + X + 1$.