Semaine du 10 Mars - Planche n^{o} 1

Exercice n^{o} 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les propositions suivantes : Chapitre 20, théorème 11 : division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice n^{o} 2 :

(Polynômes) : Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos(t) + \sin(t))^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice n^{o} 3 :

(Polynômes) : On notera dans cet exercice pour $\mathbb{K}$ un corps, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], \deg(P) \leq n\}$. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définies par récurrence par :

$$H_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = XH_n - H_n'$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ est un polynôme unitaire de degré n.
2. Étudier la parité de H_n.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, H_{n+1}' = (n+1)H_n$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}$, montrer que si $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k H_k = 0$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, n\}, a_k = 0$.
5. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, qu'il existe $(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que
$$X^k = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k} H_i$$
6. Déduire des deux questions précédentes que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists\, !(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$$

En conséquence de cette question, on notera pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $k \leq n, [[P]]_k$ le coefficient devant H_k dans la décomposition précédente (c.a.d $[[P]]_k = a_k$).

7. Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \lambda \in \mathbb{R}, k \leq n, [[\lambda P + Q]]_k = \lambda[[P]]_k + [[Q]]_k$.
8. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et tout $k \leq n$, $[[P]]_k = \frac{1}{k!}[[P^{(k)}]]_0$.
En déduire une expression de P de type *Taylor-Hermite*. (On pourra commencer par démontrer que pour tout $T \in \mathbb{R}[X], [[T']]_{k-1} = k[[T]]_k$.)
9. Appliquer cette formule au polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

Semaine du 10 Mars - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les propositions suivantes : Chapitre 20, propriétés 25 et 26 et théorème 27 : nombre de racines distinctes et divisiblités.

Exercice n° 2 :

(Polynômes) : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Exercice n° 3 :

(Polynômes) : On considère la suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels définie par :

$$P_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(X^2+1)P_n'$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) \leq n$.
   (b) En notant a_n le coefficient du monôme X^n du polynôme P_n, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$.
   (c) En déduire la valeur de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et conclure quant au degré de P_n.
2. Étudier la parité de P_n.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+1}' = (n+2)P_n$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (X^2+1)P_n(X) = 0$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$. Déterminer une relation de récurrence sur la suite u_n et en déduire une expression de u_n en fonction de n et x.
   (c) En déduire une expression pour P_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Rappeler la factorisation du polynômes $R = X^{n+1} - 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Montrer qu'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si $\frac{z+i}{z-i}$ est racine de R.
   (c) En déduire que l'ensemble des racines de P_n est $\left\{\cot\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) | k \in \{1, \ldots, n\}\right\}$ où cot désigne la fonction *cotangente*.
   (d) Justifier que les racines sont deux à deux distinctes et en déduire la factorisation de P_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Semaine du 10 Mars - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Énoncé et démontrer les propositions suivantes : Chapitre 20, propriété 46 : existence et unicité d'un polynôme d'interpolation.

Exercice n° 2 :

(Polynômes) : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ pour que X^2+X+1 divise $X^4 + aX^2 + bX + c$.

Exercice n° 3 :

(Polynôme et analyse asymptotique) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0 et π. On notera encore f_n ce prolongement. Que valent alors $f_n(0)$ et $f_n(\pi)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique polynôme P_n tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, $P_n(x) = f_n(\arccos(x))$.
3. Déterminer le degré et la parité de P_n en fonction de n.
4. Déterminer les valeurs de $P_n(1), P_n(-1), P_n(0)$ et $P_n'(0)$.
5. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1], |P_n(x)| \leq n + 1$.
6. Établir que les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence : $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.
7. Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \pi]$. En dérivant deux l'identité $\sin(\theta)f_n(\theta) = \sin((n + 1)\theta)$, déterminer une équation différentielle linéaire homogène que vérifie f_n.
8. En déduire une équation différentielle linéaire homogène que vérifie P_n.
9. En notant $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Déduire de la question précédente une relation de récurrence entre a_{k+2} et a_k Expliciter les a_k (on pourra distinguer en fonction de la parité de n).