Semaine du 10 Mars - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Série de Riemann : critère de convergence.
2. Une matrice et sa transposée ont même rang.

Exercice n° 2 :

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

Exercice n° 3 :

(Séries) : Le but de cet exercice est de démontrer le critère dit de Raabe-Duhamel

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = O(v_n)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   a) On suppose $\alpha > 1$. À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

   b) On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

   c) Étudier les deux cas suivants :

$$u_n = \frac{1}{n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

   Que peut-on donc conclure du cas $\alpha = 1$?

3. Application : Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Semaine du 10 Mars - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Critère spécial des séries alternées.
2. Formule contravariante matricielle.

Exercice n° 2 :

(Nature d'une série) : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = n \arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Exercice n° 3 :

(Séries) : Le but de cet exercice est de découvrir ce qui est communément appelé la sommation (ou transformation) d'Abel et de voir quelques applications.

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de complexes. On note pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. Pour $k \geq 1$, écrire b_k en fonction de certains termes de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

3. On suppose dorénavant que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.
   a) Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
   b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.
   c) Rappeler le critère des séries alternées, et déduire de ce qui précède une démonstration de celui-ci.
4. Applications : Dans cette question, $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer pour n entier naturel non-nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.
   (b) Discuter en fonction du réel α la naturel de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Semaine du 10 Mars - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Théorème de convergence absolue
2. Formule de changement de bases

Exercice n° 2 :

(Nature d'une série) : Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$$

Exercice n° 3 :

(Séries) : On note dans cet exercice E l'ensemble de toutes les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes d'entiers naturels telles que $p_0 \geq 2$. Pour une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E, on s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{1}{p_0 p_1 \dots p_n}$. On notera $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} p_i}$

1. Commençons par étudier quelques cas particuliers :
   a) Dans le cas où la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 2. Étudier la nature de la série et en déduire la valeur de la somme.
   b) Généraliser au cas d'une suite (p_n) constante égale à $p \geq 2$.
   c) Supposons désormais que $p_n = n + 2$, Étudier la nature de la série et en déduire la valeur de la somme. Montrer que cette valeur appartient à l'intervalle $]0, 1]$.
2. Dans le cas général, prouver que la série de terme général u_n est toujours convergente et que sa somme appartient à $]0, 1]$. On notera désormais $S(p)$ la somme associée de la série associée à la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que l'application $S : E \to]0, 1]$ est une application injective (on pourra commencer par constater que, si $p_0 < q_0$ alors $S(p) < S(q)$).
4. Soit $x \in]0, 1]$. On construit à partir de x, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$y_0 = x \text{ et } \forall n \geq 1, y_{n+1} = p_n y_n \text{ où } \ p_n = \left\lfloor 1 + \frac{1}{y_n} \right\rfloor$$

   (a) Déterminer les premiers termes des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x = \frac{3}{7}$. Calculer $S(p)$ pour la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue.
   (b) Dans le cas général, montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $]0, 1]$.
   (c) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses posées en début d'exercice.
   (d) Exprimer x en fonction de $p_0, p_1, \dots, p_n$ et y_n, et en déduire la valeur de $S(p)$ pour ce $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En conclure que S est une application bijective de E dans $]0, 1]$.