# Semaine du 31 Mars - Planche n° 1

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 24a, propriétés 11 et 12 : famille de vecteurs liée.

**Exercice n° 2 :**

(Convexité) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $f$ est positive.
2. On suppose que $f$ présente une droite asymptote en $+\infty$. Cela signifie qu'il existe une droite d'équation $y = px + q$ vérifiant $f(x) - (px + q) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels) : Soit $x, y$ deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $F + \text{Vect}(x) = F + \text{Vect}(y)$ si et seulement s'il existe $z \in F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tels que $\alpha\beta \neq 0$ et $z + \alpha x + \beta y = 0$.

**Exercice n° 4 :**

(Espaces vectoriels) : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$ strictement inclus dans $E$. Supposons que $F_n \not\subseteq F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}$ et choisissons $x \in F_n \backslash (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1})$. et $y \in E \backslash F_n$.

1. Montrer que $\lambda x + y \notin F_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.
3. Conclure que $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k \neq E$.

# Semaine du 31 Mars - Planche n° 2

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 24a, propriété 16 : caractérisation d'une base.

**Exercice n° 2 :**

(Convexité) : Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels) : Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout $a \in \mathbb{R}, E_a = \{f \in E, f(a) = 0\}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}, E_a$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$.
3. Cette somme peut-elle être directe ?

**Exercice n° 4 :**

(Espaces vectoriels) : Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ tels que $F + G = E$. Notons $F'$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$. Montrer que $E = F' \oplus G$.

# Semaine du 31 Mars - Planche n° 3

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 24a, propriété 20 : caractérisation d'une somme directe de sous-espaces.

**Exercice n° 2 :**

(Convexité) :

1. Montrer que la fonction $f : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave.
2. En déduire que pour tout $(x, y) \in ]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels) : Dans cet exercice, on chercher à étudier des sous-espaces qui admettent un supplémentaire commun.

1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels, $P$ et $Q \in E$ de degré $p$ et $q$, $E_P$ et $E_Q$ les ensembles des multiples de $P$ et $Q$ respectivement.
   (a) Montrer que $E_P$ est un espace vectoriel.
   (b) Justifier que $E = E_P \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X]$ (où $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes réels de degré au plus égal à $p - 1$).
   (c) En déduire que si $p = q$, alors $E_P$ et $E_Q$ admettent un supplémentaire commun.
2. Soit $E$ un espace vectoriel
   (a) Soit $F$ un sous-espace vectoriel et $x \in E$ non nul tels que $E = F \oplus \text{Vect}(x)$. Montrer que pour tout $y \notin F, E = F \oplus \text{Vect}(y)$.
   (b) Soit $F_1, F_2$ des sous-espaces vectoriels et $x_1 \in F_2 \backslash F_1, x_2 \in F_1 \backslash F_2$ tels que
   $$E = F_1 \oplus \text{Vect}(x_1) = F_2 \oplus \text{Vect}(x_2)$$
   Déterminer une droite vectorielle qui est un supplémentaire commun à $F_1$ et $F_2$.
3. En reprenant $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-espaces vectoriels des polynômes pairs et impairs respectivement.
   (a) Montrer que $\mathcal{I}$ est un supplémentaire de $\mathcal{P}$ dans $E$.