# Semaine du 7 Avril - Planche n° 1

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 24b, théorème 1 : théorème de la base extraite.

**Exercice n° 2 :**

(Espaces vectoriels) : On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $L$ l'ensemble des fonctions $\ell$ de $E$ de la forme $x \mapsto ax$ où $a$ est une constante et $G$ l'ensemble des fonctions $g$ de $E$ qui sont nulles en 1.

1. Montrer que $L$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Montrer qu'ils sont supplémentaires dans $E$.

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels) : Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $E_p$ l'ensemble des suites réelles $p$-périodiques.

1. Montrer que $E_p$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Pour $0 \leq k \leq p-1$, on définit la suite $u^k$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que $(u^0, u^1, \ldots, u^{p-1})$ est une base de $E_p$.
3. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $E_p$ ?
4. Justifier que $E_2$ est un sous-espace vectoriel de $E_4$.
5. On note $F$ l'ensemble des suites $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 0$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E_4$.
6. Montrer que $F$ est un supplémentaire de $E_2$ dans $E_4$.

# Semaine du 7 Avril - Planche n° 2

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 24b, propriété 11 : dimension d'un sous-espace vectoriel.

**Exercice n° 2 :**

(Espaces vectoriels) : Soient $F$ et $G$ deux plancs vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On suppose $F$ et $G$ distincts. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. La somme est-elle directe ?

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels) : Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $F$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : y'' = (1 + x^2)y$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Soient $f$ et $g$ les applications définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x^2/2} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
Montrer que $f$ et $g$ appartiennent à $F$.
3. Montrer que si $v$ et $w$ appartiennent à $F$, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $h$ un élément de $F$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$. On pourra calculer la dérivée de la fonction $\frac{h}{f}$.
5. Montrer que $F = \text{vect}(f, g)$.
6. En déduire la dimension de $F$.

# Semaine du 7 Avril - Planche n° 3

**Exercice n° 1 :**

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 24b, propriété 13 : Formule de Grassmann.

**Exercice n° 2 :**

(Espaces vectoriels) : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$. On choisit un vecteur $x \in E$ et on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!], v_k = x + e_k$.

1. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ à l'aide du vecteur $x$.
2. Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} x_k = -1$, alors la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est liée.
3. On suppose dans cette question que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre. Montrer alors que cette famille est une base de $E$ et donner les coordonnées du vecteur $x$ dans cette base.
4. Établir :
$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ est liée} \iff \sum_{i=1}^{n} x_i = -1$$

**Exercice n° 3 :**

(Espaces vectoriels) : Soient $n \geq 2$, et $E = \mathbb{R}^n$. Considérons $u = (1, \ldots, 1) \in E$. On défini $H$ par

$$H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in E, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

1. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $f_i = e_n - e_i$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ est une famille libre de $H$.
2. En déduire la dimension de $H$.
3. Montrer que $H$ et $\mathbb{R}u$ sont supplémentaires dans $E$.
4. Soit $v \notin H$. Que dire de $\mathbb{R}v$ ?