Semaine du 12 Mai - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et <u>précis</u>**.

1. Inégalité de Jensen.
2. Définition de la somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.

Exercice n° 2 :

(Convexité) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive.
2. On suppose que f présente une droite asymptote en $+\infty$. Cela signifie qu'il existe une droite d'équation $y = px + q$ vérifiant $f(x) - (px + q) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice n° 3 :

(Espaces préhilbertiens) : Montrer les inégalités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{(n+1)2^n}$.
2. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
Quand a-t-on égalité ?
3. Si f est continue strictement positive sur $[0, 1]$, alors
$$\left(\int_0^1 f(t)\, dt \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^3\, dt \times \int_0^1 \frac{1}{f(t)}\, dt.$$
4. Si f est continue sur $[a, b]$, ne s'annule pas, et vérifie $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = 1$, alors
$$\int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt \geq (b-a)^2.$$
Quand a-t-on égalité ?

Semaine du 12 Mai - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Une fonction est convexe sur un intervalle si et seulement si les fonctions pentes associées sont croissantes.

Exercice n° 2 :

(Convexité) : Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 3 :

(Espaces euclidiens) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Une application $u : E \to E$ est dite *antisymétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x, u(y)\rangle + \langle y, u(x)\rangle = 0$$

On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des applications antisymétriques de E.

(**Remarque :** Rien à voir avec les applications *multilinéaires* antisymétriques !)

1. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. Montrer que u est linéaire.
2. Soit $u : E \to E$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) u est linéaire et $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$;
   (ii) u est antisymétrique ;
   (iii) u est linéaire et sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.
3. Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
4. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est l'orthogonal de $\ker u$.
5. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est également stable par u.

Semaine du 12 Mai - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
2. Inégalité arithmético-géométrique.

Exercice n° 2 :

(Convexité) :

1. Montrer que la fonction $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \ln(\ln(x))$ est concave.
2. En déduire que pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$

Exercice n° 3 :

(Espaces préhilbertiens) : On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$).

On pose, $\forall (f, g) \in E^2$,

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,dt.$$

On notera par ailleurs $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$, et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur l'espace E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Donner une expression explicite de la projection orthogonale sur G.
4. On note enfin $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
   (a) Exhiber une fonction $f_0 \in E_{a,b}$, calculer sa projection orthogonale sur F et montrer que
   $$E_{a,b} = \{f_0 + h \mid h \in F\}$$
   (quelle structure a-t-on ainsi défini sur l'ensemble $E_{a,b}$?)
   (b) Déterminer la valeur de
   $$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t))\,dt.$$