Semaine du 02 Juin - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Relation de Chasles
2. Si $\dim \vec{\mathcal{E}} = 3$, l'intersection de deux plans affines non parallèles est une droite affine.
3. Réciproquement, toute droite affine est l'intersection de deux plans affines non parallèles.

Exercice n° 2 :

(Calcul différentiel) : On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice n° 3 :

(Espaces affines) : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 3 \text{ et } x - 2y + z = 1\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer un point de F et une direction vectorielle de F.
3. Donner une représentation paramétrique de F.

Semaine du 02 Juin - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. $\vec{\mathcal{F}} = \{\overrightarrow{mn}, (m,n) \text{ décrivant } \mathcal{F}^2\}$
2. Équation cartésienne d'un hyperplan dans un repère.

Exercice n° 2 :

(Calcul différentiel) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Prouver que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice n° 3 :

(Espaces affines) : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 5 \text{ et } 3x + y - 2z = 4\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une représentation paramétrique de F.

Semaine du 02 Juin - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de direction $\vec{\mathcal{F}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}$.
2. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire de l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ passant par a, m un point de $\vec{\mathcal{E}}$. $d(m, \mathcal{H}) = |\langle \overrightarrow{am} | \vec{n} \rangle|$.

Exercice n° 2 :

(Calcul différentiel) :

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 3 :

(Espaces affines) : On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2 \text{ et } 2x - y + 3z = 5\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer un point particulier de F.
3. Trouver une direction vectorielle de F.
4. Donner une représentation paramétrique de F.
5. Déterminer la dimension de F.