Semaine du 9 Juin - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 29, propriétés 21 et 22 : lemmes de coalition.

Exercice n° 2 :

(Déterminant) : Soit f définit par $P \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer $\det(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n° 3 :

(Groupe symétrique) : Soient $n \geq 2$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\sigma \in S_n$. Montrer que σ et $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ commutent si, et seulement si, $\{i, j\}$ est stable par σ.

Exercice n° 4 :

(Probabilités) : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On note M la matrice aléatoire $(X_i X_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{rg}(M)$.
2. Déterminer la loi de $\mathrm{tr}(M)$.

Semaine du 9 Juin - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 30b, propriétés 9 et 10 : Formules de changement de bases et caractérisation d'une base.

Exercice n° 2 :

(Déterminant) : Soient E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de F et G. Calculer le déterminant de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G en fonction des dimensions de F et G.

Exercice n° 3 :

(Groupe symétrique) : Montrer que tout élément de A_n se décompose en produit de 3-cycles. (Autrement dit que les 3-cycles engendrent A_n).

Exercice n° 4 :

(Probabilités) : Une entreprise recrute un cadre. n candidats se présentent pour le poste (n étant un entier naturel non nul fixé). Chacun d'eux passe un test et le premier qui y satisfait est engagé. La probabilité qu'un candidat de réussir le test est $p \in]0,1[$. On notera $q = 1 - p$ pour alléger les calculs.

On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui se présente est engagé, et $X = n + 1$ si aucun des n candidats n'est engagé.

1. (a) Déterminez la loi de X.
   (b) Vérifiez que $\sum_{k=1}^{n+1} P(X = k) = 1$.
2. (a) En dérivant par rapport à x la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}(X) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3. Comment doit-on choisir p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des n candidats ? Calculer la valeur minimum de p obtenue pour $n = 4$ puis pour $n = 10$.

Semaine du 9 Juin - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes : **En introduisant tout les objets mis en jeu, pour avoir un énoncé complet et précis**.

1. Chapitre 30b, propriété 26 : développement suivant une ligne ou une colonne.

Exercice n° 2 :

(Déterminant) : Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x) \,|\, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Exercice n° 3 :

(Groupe symétrique) : Soit $n \geq 3$

1. Soient $a \neq b \in [\![1, n]\!]$ et $\sigma \in S_n$. Montrer que $\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \end{pmatrix}$.
2. On (r)appelle que le centre du groupe symétrique est l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui commutent avec toutes les autres : $\forall s \in S_n, s \circ \sigma = \sigma \circ s$. Déterminer le centre de S_n.

Exercice n° 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. Déterminer les lois de Y et Z.
2. Calculer leurs espérances et leurs variances.
3. Déterminer des équivalents des espérances et des variances de Y et Z lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?