Semaine du 30 septembre - Planche n^{o} 1

Exercice n^{o} 1 :

(Questions de cours) :

1. Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ dérivable, Compléter et démontrer : $(\exp \circ \varphi)'(t) = ?$
2. Donner et démontrer les limites de ln en $+\infty$ et 0^+.
3. Compléter et démontrer : $|\text{th}| < ?$

Exercice n^{o} 2 :

(Applications) : Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux ensembles. On considère $\varphi : A \in \mathcal{P}(E) \mapsto f(A)$. Montrer que f est injective si et seulement si φ l'est.

Exercice n^{o} 3 :

(Dérivation et fonctions usuelles) : On considère la fonction numérique f définie par

$$f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1}{2x - 1}$$

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Montrer que f est dérivable sur D et mettre f' sous la forme suivante :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \backslash \{0\}, f'(x) = 2xg(x)$$

   avec g à déterminer.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$.
4. Étudier g et en déduire les variations de f.

Semaine du 30 septembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Que dire de la composée et de la restriction de fonctions surjectives ? Le démontrer.
2. Énoncer et démontrer la propriété de morphisme de ln.
3. Montrer que $\ln_a$ et $\exp_a$ sont bijectives et réciproques.

Exercice n° 2 :

(Dérivation) : Étudier si les fonctions ci-dessous sont dérivables et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice n° 3 :

(Fonctions usuelles) : On note $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
3. Justifier que f induit une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
4. Justifier sans résoudre l'équation, que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution dans I.
5. Résoudre l'équation de la question précédente.

Semaine du 30 septembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Compléter et démontrer, si $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ alors ?
2. Compléter et démontrer : $|\text{ch}| \geq ?$
3. Pour $a > b > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^b x}{x^a} = ?$

Exercice n° 2 :

(Applications) : La fonction suivante $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ est-elle bijective ? Si non, comment modifier les ensembles de départ et d'arrivée afin de la rendre bijective ?

Exercice n° 3 :

(Dérivation et fonctions usuelles) : On pose $f : x \mapsto \arctan(\text{sh}\, x) + \arccos(\text{th}\, x)$

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de f
2. Montrer que f' est nulle sur son domaine de dérivabilité.
3. Montrer que $\arctan(\frac{5}{12}) + \arccos(\frac{5}{13}) = \frac{\pi}{2}$.

Semaine du 30 septembre - Exercices supplémentaires

Exercice n° 1 :

(Applications) : Soit f une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 0, f(n) \leq n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$

Exercice n° 2 :

(Applications) : Soit f une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 0, f(n) \leq n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$

Exercice n° 3 :

(Applications) : Soit A, B, C, D des ensembles. Construire une bijection entre $C^{A\times B}$ et $(C^A)^B$ et une injection de $C^A \times D^B$ dans $(C \times D)^{A\times B}$

Exercice n° 4 :

(Applications) : Soit E un ensemble, et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer si p est surjective ou injective, alors $p = Id_E$.