Semaine du 07 Octobore - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Formule de binôme de Newton.

Exercice n° 2 :

(Applications et dérivabilité) : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable à l'envie.

1. Si f est paire, que peut-on dire de la parité de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
2. Si f est impaire, que peut-on dire de la parité de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?
3. Si f est périodique, que peut-on dire de la périodicité de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Exercice n° 3 :

(Étude de fonctions) : On définit la fonction $f : x \in [0, \pi] \mapsto \sin^2(x)\sin(2x) \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le maximum de f sur $[0, \pi]$
2. Peut-on étendre cette fonction sur $\mathbb{R}$? que se passe-t-il concernant le maximum ?
3. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \geq 1$,

$$\left|\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x)\right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Semaine du 07 Octobre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Formules d'addition pour cosinus, sinus et tangente. (Propriétés 23 et 24 chapitre 4)

Exercice n° 2 :

(Application directe) : Montrer que la fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2xe^x$ induit une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble à déterminer.

Exercice n° 3 :

(Étude de fonctions) : Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
7. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$ et la courbe représentative de la fonction f.

Semaine du 07 Octobore - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Propriétés de la bijection réciproque (Propriétés 20 et 21 chapitre 5)

Exercice n° 2 :

(Application directe) : Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice n° 3 :

(Étude de fonction) : On pose pour cet exercice $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe repreésentative de la fonction f.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f. Calculer ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Que vaut $f(1-x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$? Qu'est-ce que cette égalité traduit en terme de symétrie de $\mathcal{C}_f$?
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$. Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}_f$?
5. Tracer une allure de $\mathcal{C}_f$ tenant compte de tous les calculs effectués jusqu'ici.
6. Déduire des questions précédentes la valeur minimale prise par l'expression $x^x(1-x)^{1-x}$ lorsque $x \in]0,1[$.