Semaine du 07 Octobre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$
2. Exprimer $J_{n+1}(x)$ en fonction de $J_n(x)$ où $J_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

Exercice n° 2 :

(Primitives) : Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x++2}$

Exercice n° 3 :

(Intégrale et primitive) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}dt$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.
2. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n \geq 0$.
3. Calculer I_n d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+3}\binom{n}{k} = 2^{2n+2}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}$$

Semaine du 07 Octobre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Pour $X \in]0, \pi[$, $\int_0^X \frac{dt}{2+\cos(t)} =?$
2. Croissance de l'image directe.
3. Primitive de tan.

Exercice n° 2 :

(Primitives) : Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(2x))^3 \cos(3x)$

Exercice n° 3 :

(Intégrale et primitive) : On pose pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Calculer I_0.
4. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Exprimer S_n en fonction de I_n
5. En déduire la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Semaine du 07 Octobre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Formule de changement de variables.
2. Primitive de arctan.
3. Dérivation de $x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \cos(e^t)dt$

Exercice n° 2 :

(Primitives) : Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$ pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$

Exercice n° 3 :

(Intégrale et primitive) : On pose pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Calculer I_0.
4. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n.
5. En déduire la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $\ln(2) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Semaine du 07 Octobre - Exercices supplémentaires

Exercice n° 1 :

Wallis -> Exercice 5

Exercice n° 2 :

Différentes primitives -> Exo et Solutions