Semaine du 4 Novembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Que dire de l'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes ? Le montrer.
2. Si A est une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ alors $\inf(-A) = ?$
3. Si A est une partie non vide, minorée de $\mathbb{R}$ alors $\sup(-A) = ?$

Exercice n° 2 :

(Groupes) : Soit G un groupe. On définit le centre de G comme étant :

$$Z(G) = \{a \in G, \forall x \in G, ax = xa\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice n° 3 :

(Anneaux) : Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément a de A est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0_A$

1. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si $x \times y$ est nilpotent, alors $y \times x$ est nilpotent.
2. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si x et y commute, et que l'un des deux est nilpotent, alors $x \times y$ est nilpotent.
3. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.
4. Soit $x \in A$. Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible et calculer son inverse.

Semaine du 4 Novembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Donner une caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes et le démontrer.
2. Démontrer l'existence et l'unicité de la partie entière.

Exercice n° 2 :

(Anneaux et corps) :

1. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Soit F un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Montrer que $F = \mathbb{Q}$.

Exercice n° 3 :

(Sous-groupe de $\mathbb{Z}$) : Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak | k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. On se propose de montrer que, réciproquement, tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.
   a) Vérifier que le groupe $\{0\}$ est de la forme voulue.
   b) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Montrer que $H_+ = \{h \in H | h > 0\}$ possède un plus petit élément. On note $a = \min(H_+)$.
   c) Établir que $a\mathbb{Z} \subseteq H$.
   d) En étudiant le reste de la division euclidienne d'un élément de H par a montrer que $H \subseteq a\mathbb{Z}$.
   e) Conclure que pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}$, il existe un unique $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Semaine du 4 Novembre - Planche n$^{\text{o}}$ 3

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 :

(Questions de cours) :

1. Donner et démontrer le théorème de caractérisation des sous-groupes.
2. Si $M = \sup(A)$, alors il existe un suite de points de A convergeant vers M.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 :

(Corps) : On note $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est un corps.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 :

(Morphisme et applications) : Les deux questions suivantes sont indépendantes mais la philosophie de résolutions sont proches.

1. Soit A un anneau intègre commutatif fini. Montrer que A est un corps.
2. Soit f un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer $\sum\limits_{x \in G} f(x)$.