Semaine du 18 Novembre - Planche n$^{\text{o}}$ 1

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 :

(Questions de cours) :

1. Que dire d'une suite croissante et majorée ? Le montrer.
2. Que dire de la composée de limites de deux fonctions ? Le montrer (seulement cas de a, b réels et c complexes)

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 :

(Suites) : Soient $a > 0$ et on définit le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$

1. Montrer que si $a \geq 1, u_n \to +\infty$
2. Montrer que si $0 < a < 1$, La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (Indication : on pourra utiliser l'inégalité $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$)

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 :

(Suites) : Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \geq N, |u_n - u_m| \leq \varepsilon$$

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente
3. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.
4. En déduire que la réciproque à la question 1 est vraie.

Semaine du 18 Novembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer le théorème de recollement avec les suites extraites de rangs pairs et impairs.
2. Comparaison asymptotique de a^n et $n!$.
3. Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice n° 2 :

(Suites) : On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice n° 3 :

(Suites) : (Théorème de Césaro) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{C}$, alors $\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
3. La réciproque à la question 2 est elle vraie ?

Semaine du 18 Novembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de l'existence de limite.

Exercice n° 2 :

(Suites) : On définit deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que les suites $(S_n)_n$ et $(S'_n)_n$ sont adjacentes.

On peut montrer que leur limite commune est $\frac{\pi^2}{6}$*, mais ce sera pour une autre colle...*

Exercice n° 3 :

(Suites) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite dont les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Question bonus : ce résultat persiste-il si on ne suppose la convergence que des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Exercice n° 4 :

(Suites) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée.

1. Montrer que
$$\forall (M, N) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N + 1 \quad \text{et} \quad u_n \geq M$$
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que la construction de la question précédente peut être affinée pour prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.