Semaine du 25 Novembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :
(Question de cours) : L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de E (Propriété 11 du Chapitre 10).

Exercice n° 2 :
(Applications) : Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E.

1. Montrer que si $A \cap B = \varnothing$, alors pour toute partie X de E, $(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$
2. On considère l'application suivante $f : X \in \mathcal{P}(E) \mapsto (X \cup A, X \cup B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que f n'est pas surjective.
3. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Exercice n° 3 :
(Relations binaire) : On note $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + 5y \leq 0 \text{ et } 3x - 5y \leq 0\}$. Pour $c_1 = (x_1, y_1)$ et $c_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $c_1 - c_2$ le couple $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ on définit une relation comme suit :

$$c_1 \prec c_2 \Leftrightarrow c_1 - c_2 \in E$$

1. Montrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce une relation d'ordre totale ou partielle ?

Semaine du 25 Novembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément (Propriété 13 du Chapitre 10).

Exercice n° 2 :

(Applications) : Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r de Y dans X, telle que$r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s(= f^{-1}$ par conséquent).

Exercice n° 3 :

(Relations binaires) : Soit E un ensemble. On rappelle que E^E est l'ensemble des applications de E dans E. Si f et g sont deux éléments de E^E, on dira que f est conjuguée à g s'il existe une bijection φ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E^E.
2. Quelle est la classe d'équivalence de Id_E ?
3. Quelle est la classe d'équivalence d'une application constante ?
4. On suppose à partir de maintenant que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, Les applications $f : x \in E \mapsto x^2 \in E$ et $g : x \in E \mapsto ax^2$ sont-elles conjuguées ?
5. Les applications sin et cos sont-elles conjuguées ?

Semaine du 25 Novembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Question de cours) : Composition et injectivité/surjectivité (Propriétéz 3 et 5 du Chapitre 10).

Exercice n° 2 :

(Applications) : Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. On considère les ensemble $E = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| = 1\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$. Si on identifie $\mathbb{C}$ au plan, donner la nature géométrique de E et F, et donner leurs équations cartésiennes.
3. Vérifier que $f(E \backslash \{0\}) \subseteq F$.
4. Montrer que f induit une bijection de $E \backslash \{0\}$ sur F.

Exercice n° 3 :

(Relations binaires) : Dans $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Cette relation d'ordre est-elle totale ?
3. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée (sous-entendu pour cette relation) ?