Semaine du 25 Novembre - Planche n° 1

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers.

Exercice n° 2 :

(Équivalents et limites) : Calculer $\lim_{x \to a} f(x)$:

1. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $a = +\infty$
2. $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan x}$ en $a = 0$

Exercice n° 3 :

(Limites et intégrales) : On pose pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$

1. Que vaut, pour $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$?
2. Démontrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$$

3. En déduire une majoration de $|\ln(2) - f(x)|$.
4. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Semaine du 25 Novembre - Planche n° 2

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes :

1. Lemme de Gauss
2. Si $\delta = a_1 \wedge \cdots \wedge a_s$. alors il existe $a'_1, \ldots, a'_s$ premiers entre eux dans leur ensemble tels que : $a1 = \delta a'_1, \ldots, a_s = \delta a'_s$
3. Existence et unicité de la forme irréductible d'un rationnel.

Exercice n° 2 :

(Équivalents et limites) : Déterminer un équivalent des fonctions f suivantes en a, puis calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$:

1. $f(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ en $a = +\infty$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}$ en $a = +\infty$

Exercice n° 3 :

(Limites et équivalents) :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $x_n = \tan(x_n)$. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
2. Déterminer $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - n\pi)$. On pourra introduire la fonction arctan.
3. Déterminer un équivalent simple de $x_n - (n\pi + \ell)$.

Semaine du 25 Novembre - Planche n° 3

Exercice n° 1 :

(Questions de cours) : Énoncer et démontrer les propositions suivantes

1. $\text{pgcd}(a,b) \times \text{ppcm}(a,b)$ et ab sont associés.
2. Lemme d'Euclide
3. Théorème d'Euclide

Exercice n° 2 :

(Équivalents et limites) : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^3}}$

Exercice n° 3 :

(Limites) : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout intervalle de longueur 1.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)] = 0$. Traduire ceci à l'aide de quantificateurs et $\varepsilon, A, ...$
2. Soit $x \geq A$ et $n = \lfloor x - A \rfloor$. Montrer que
$$|f(x) - f(x-n)| \leq n\varepsilon$$
3. En déduire que pour tout $x \geq A$, $\frac{|f(x)|}{x} \leq \frac{M}{x} + \varepsilon$ où M est un majorant de f sur $[A, A+1]$
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
5. On suppose dorénavant que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)] = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.