L1 (BST) - Outils mathématiques : Fiche Méthode n°1

Alix MATHIEU - https://alixm1.github.io

Table des matières

1 Méthode : résolution d'équations/inéquations de degré 1 & 2

1.1 Rappel sur la notion d'égalité, d'identité, d'équation

Le symbole = peut avoir plusieurs sens en mathématiques, sens qui est déterminé par le contexte.

- Quand on écrit $7(3x-1) = 21x - 7$, cette **égalité** est vraie quelque soit le nombre générique x, il s'agit **d'une identité** .
- Quand on écrit $7x + 3 = 5x + 9$, il convient de se demander pour quelle(s) valeur(s) de x cette égalité est **vraie**, on dit aussi **vérifiée**.

Comme $7\times3+3 = 21+3 = 24$ et que $5\times3+9 = 15+9 = 24$, cette égalité est vraie pour $x = 3$.	En revanche, comme $7 \times 2 + 3 = 14 + 2 = 17$ et que $5 \times 2 + 9 = 10 + 9 = 19$, cette égalité n'est pas vérifiée pour $x = 2$.

- **Résoudre l'équation** $7x + 3 = 5x + 9$ revient à déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles cette égalité est vérifiée..

1.2 Vocabulaire et principe général

Étant donné une équation :

$$7x3 = 5x + 9$$

— x est **l'inconnue** de cette équation.

— $7x + 3$ est le **premier membre** ou membre de gauche.

— $5x + 9$ est le **second membre** ou membre de droite.

Principe général : Si une égalité est vraie, alors on obtient une égalité vérifiée en (ajoutant, soustrayant, multipliant et/ou divisant) la même expression (bien définie) aux deux membres de l'égalité.

1.3 Méthode de résolution d'équation de degré 1

1. On commence d'abord par développer et réduire les deux expressions à gauche et à droite.
2. Isoler les termes dépendant de x dans l'un des membres (en ajoutant/soustrayant la même expression dans les 2 termes).
3. Isoler les termes constants dans l'autre membre (en ajoutant/soustrayant la même expression dans les 2 termes).
4. Diviser l'égalité par la quantité devant l'inconnue pour identifier quelle valeur de x vérifie l'égalité.

Exemple :

$$\begin{aligned}
7x + 3 &= 5x + 9 \\
7x + 3 - 5x &= 5x + 9 - 5x \\
2x + 3 &= 9 \\
2x + 3 - 3 &= 9 - 3 \\
2x &= 6 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

1.4 Inéquation de degré 1 et méthode de résolution

— Une **inéquation de degré** 1 est une inégalité entre deux expressions algébriques contenant une seule variable de degré 1 :

$$2(x-1) < 6x + 8.$$

— **Résoudre une inéquation**, c'es trouver l'ensemble de **toutes** les valeurs de la variable pour lesquelles l'inégalité est vraie.

— Ces valeurs constituent **l'ensemble des solutions de l'inéquation**, qu'on note S et qu'on écrit sous la forme d'un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Pour résoudre une inéquation du premier degré d'inconnue x :

1. On commence d'abord par développer et réduire les deux expressions à gauche et à droite.
2. On isole les termes en x dans un membre.
3. On isole les termes constants dans l'autre membre.

4. On divise l'inégalité par la quantité devant l'inconnue : **ATTENTION**
   — **Il est interdit de diviser par** 0.
   — Si cette quantité est **strictement positive**, on ne change pas le sens de l'inégalité.
   — Si cette quantité est **strictement négative**, on change le sens de l'inégalité.

Exemples :

Cas 1 : Inégalité préservée

$$
\begin{aligned}
2(x-1) &< 6x+8\\
2x-2 &< 6x+8\\
2x-2 &< 6x+8\\
2x-2-2x &< 6x+8-2x\\
-2 &< 4x+8\\
-2-8 &< 4x+8-8\\
-10 &< 4x\\
\frac{-10}{4} &< \frac{4x}{4} \quad (\text{car } 4>0)\\
\frac{-5}{2} &< x
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions est $S =]\frac{-5}{2}, +\infty[$.

Cas 2 : Inégalité renversée

$$
\begin{aligned}
4(x-3)-8 &< 6(x-3)\\
4x-12-8 &< 6x-18\\
4x-20 &< 6x-18\\
4x-20-6x &< 6x-18-6x\\
-2x-20 &< -18\\
-2x-20+20 &< -18+20\\
-2x &< 2\\
\frac{-2x}{-2} &> \frac{2}{-2} \quad (\text{car } -2<0)\\
x &> -1
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions est $S =]-1, +\infty[$.

1.5 Équation de degré 2 et méthode de résolution

— Une **équation de degré** 2 est une égalité entre deux expressions algébriques contenant une seule variable de degré au plus 2 :

$$4(x+1)^2 = 3x^2 + 2x - 1$$

Pour résoudre une équation du second degré d'inconnue x :

1. On commence d'abord par développer et réduire les deux expressions à gauche et à droite.
2. On passe du côté gauche tous les termes, pour se ramener à l'étude d'une équation du type $ax^2+bx+c=0$, on est donc à ramener à l'étude des racines d'un polynôme (dit aussi trinôme) du second degré de la forme :

$$T(x) = ax^2 + bx + c, \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

3. On calcule le discriminant de $T(x)$: $\Delta = b^2 - 4ac$.
4. On conclut en fonction du cas dont on le se trouve :
   * Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

   La factorisation de $T(x)$ est $T(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$

* Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle (double ou dit de multiplicité 2) :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

La factorisation de $T(x)$ est $T(x) = a(x-a)^2$

* Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.

Exemple :

$$\begin{aligned}
4(x+1)^2 &= 3x^2+2x-1 \\
4(x^2+2x+1) &= 3x^2+2x-1 \\
4x^2+8x+4 &= 3x^2+2x-1 \\
4x^2+8x+4 &= 3x^2+2x-1 \\
4x^2+8x+4-(3x^2+2x-1) &= 3x^2+2x-1-(3x^2+2x-1) \\
x^2+6x+5 &= 0
\end{aligned}$$

Maintenant qu'on s'est ramené à une équation du type $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1, b=6, c=5$, on calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\cdot1\cdot5 = 36-20 = 16 > 0$. On se trouve ici dans le premier cas, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2\cdot1} = \frac{-6-4}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

et

$$r_2 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2\cdot1} = \frac{-6+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{-5, 1\}$.

1.6 Inéquation de degré 2 et méthode de résolution

— Une **inéquation de degré** 2 est une inégalité entre deux expressions algèbriques contenant une seule variable de degré au plus 2 :

$$3x^2+x+12 > 8x^2-2x-10$$

Pour résoudre une inéquation du second degré d'inconnue x :

1. Commencer par développer et réduire les expressions de chaque membre de l'inégalité.
2. Passer tous les termes d'un côté pour se ramener à une inégalité du type suivant :

$$ax^2+bx+c \leq 0 \qquad \text{ou} \qquad ax^2+bx+c \geq 0$$

3. Chercher les racines du polynôme $T(x) = ax^2+bx+c$ (voir § précédent)
4. En fonction du cas parmi ceux suivant trouver la factorisation et le tableau de signe :
   * Si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines réelles $r_1 < r_2$ qu'on ordonne, on a donc la factorisation $T(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$ et le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
$T(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

* Si $\Delta = 0$, le polynôme possède une racine double r, on a donc la factorisation $T(x) = a(x-r)^2$ et le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		r		$+\infty$
$T(x)$		signe de a	0	signe de a	

* Si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet pas de racines réelles, il est donc de signe constant, qui est le signe de c (valeur de $T(x)$ en $x = 0$).

5. Revenir à l'inégalité à laquelle on s'était ramené en 2. et conclure à l'aide du tableau de signe.

Exemple :

$$\begin{aligned}
8(x+3)^2 - 40x &\geq 10x^2 + 3x + 6 \\
\color{red}{8(x^2+6x+9)} - 40x &\geq 10x^2 + 3x + 6 \\
8x^2 + 48x + 9 - 40x &\geq 10x^2 + 3x + 6 \\
8x^2 + 8x + 9 &\geq 10x^2 + 3x + 6 \\
8x^2 + 8x + 9 \color{red}{-(10x^2+3x+6)} &\geq 10x^2 + 3x + 6 \color{red}{-(10x^2+3x+6)} \\
-2x^2 + 5x + 3 &\geq 0
\end{aligned}$$

* On s'est ramené à une équation réduite comme dans la méthode au point 2., on étudie donc les racines du polynôme $T(x) = -2x^2 + 5x + 3$:
* On calcule le discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49 > 0$. Le polynôme possède deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{-12}{-4} = -3$$

et

$$r_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

Le polynôme se factorise donc en $T(x) = -2(x+0.5)(x+3)$ et a donc pour tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$T(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

* L'inéquation du second degré initiale avait été ramenée à l'inéquation réduite $-2x^2+5x+3 \geq 0$, qui par le tableau de signe est vérifiée si et seulement si $x \in [-3, -0.5]$.
* L'ensemble des solutions est $S = [-3, -0.5]$

2 Méthode : Simplification de puissances

2.1 Rappels sur les nombres premiers et la décomposition en éléments premiers

— Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui même.
Exemple : 2 est un nombre premier car il est divisible seulement par 1 et 2. 12 n'est pas un nombre premier car il est divisible par $1, 2, 3, 4, 6$ et 12.

— Tout entier strictement positif possède **une unique décomposition en facteurs premiers.**
Exemple : La décomposition de 12 en facteurs premiers est $12 = 2^2 \times 3$

— **Comment décomposer un nombre n en facteurs premiers ?**

1. si n est premier, alors la factorisation s'arrête.
2. si n est composé, alors on divise n par le premier nombre premier $p_1 = 2$
   * si le reste est nul, on reprend avec la valeur $\frac{n}{2}$ et on ajoute 2 à la liste des facteurs obtenus pour avoir une factorisation de n.
   * Si le reste est non nul, on teste la division de n par le nombre premier suivant $p_2 = 3$.
3. On itère le procédé jusqu'à arrivé à épuisement, et à obtenir un nombre premier. On peut donc réécrire la factorisation avec tous les facteurs premiers utilisés. (voir exemple ci-dessous).

Exemple : Effectuons la décomposition en élément premier de 360

1. On regarde tout d'abord la divisibilité de 360 par 2 : oui car $360 = 2 \times 180$.
2. On recommence le procédé maintenant avec $\frac{360}{2} = 180$, on regarde si ce nombre est divisible par 2 : oui, car $180 = 2 \times 90$.
3. On recommence le procédé maintenant avec $\frac{180}{2} = 90$, on regarde si ce nombre est divisible par 2 : oui, car $90 = 2 \times 45$.
4. On recommence le procédé maintenant avec $\frac{90}{2} = 45$, on regarde si ce nombre est divisible par 2 : non, donc on passe au nombre premier suivant c'est à dire 3, 45 est-il divisible par 3 ? Oui car $45 = 3 \times 15$.
5. On recommence le procédé maintenant avec $\frac{45}{3} = 15$, on regarde si ce nombre est divisible par 2 : non. par 3 oui, car $15 = 3 \times 5$.
6. On recommence le procédé maintenant avec $\frac{15}{3} = 5$ qui est un nombre premier donc on s'arrête.

On peut donc remonter tout cela et écrire que $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Quand vous avez écrit votre factorisation, pensez à vérifier que celle-ci est bonne... ça ne prend quand même pas longtemps de faire le calcul pour être sur.

2.2 Méthode de simplification de puissance par décomposition en premiers

Étant donné un quotient sous la forme de multiplication avec des puissance, on se demande quelle méthode utilisé pour simplifier ce quotient :

$$\frac{10^3 \times 2^4 \times 9^3}{12 \times 60}$$

1. Effectuer la décomposition en facteur premier de chaque terme du numérateur et du dénominateur.
2. Utiliser les propriétés des puissances suivantes pour isoler chaque terme de la décomposition et l'écrire seulement sous la forme d'une puissance :

$$(ab)^n = a^n \times b^n \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{et} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m}$$

3. Utiliser les deux propriétés des puissances pour regroupe les termes du numérateur et dénominateur :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \text{et} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

4. Calculer.

Exemple :

$$\frac{10^3 \times 2^4 \times 9^3}{12 \times 60}$$

1. À l'aide du paragraphe précédent, on trouve les décompositions en facteur premiers suivantes : $10 = 2 \times 5,\ 9 = 3^2,\ 12 = 2^2 \times 3,\ 60 = 2^2 \times 3 \times 5$
2. En utilisant les propriétés précédentes successivement, on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{10^3 \times 2^4 \times 9^3}{12 \times 60} &= \frac{2^3 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^6}{2^2 \times 3 \times 2^2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{2^{3+4} \times 3^6 \times 5^3}{2^{2+2} \times 3^{1+1} \times 5} \\ &= \frac{2^7 \times 3^6 \times 5^3}{2^4 \times 3^2 \times 5} \\ &= 2^{7-4} \times 3^{6-2} \times 5^{3-1} \\ &= 2^3 \times 3^4 \times 5^2 = 16200\end{aligned}$$

2.3 Remarque sur l'existence d'autres méthodes

La méthode précédente est une méthode existante, qui a ses avantages et ses défauts. D'autres méthodes sont bien évidemment acceptées, tant que les étapes sont justifiées. On peut par exemple certaines fois ne pas décomposer directement en facteur premier, et d'abord faire des simplifications avec des termes composés, via les propriétés des puissances, et des fractions.

En conclusion, cette méthode peut être utilisée et suivit à la lettre, mais d'autres méthodes (ou alternatives) sont tout à fait acceptable, tant que tout est justifié et correcte.