Université Marie & Louis Pasteur
UFR Sciences et Techniques
LmB (Laboratoire de Mathématiques de Besançon)

Mémoire de Master
en Mathématiques

Cohomologie cristalline de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, rigide de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)$ et leur lien avec les anneaux de périodes de Fontaine

Encadré par

- *Christine Huyghe*

Réalisé par

- *Alix Mathieu*

19 juin 2025

Table des matières

Introduction

L'étude des variétés algébriques en caractéristique p et de leurs relèvements en caractéristique nulle a conduit au développement de plusieurs théories cohomologiques adaptées aux situations où la cohomologie étale ou de de Rham classiques deviennent inopérantes. Parmi ces théories, la cohomologie cristalline et la cohomologie rigide jouent un rôle fondamental, notamment dans le cadre de la géométrie p-adique et de la théorie de Hodge p-adique.

La cohomologie cristalline, développée par Berthelot dans les années 1970, fournit un analogue de la cohomologie de de Rham pour les schémas lisses en caractéristique p. Elle s'appuie sur une théorie des cristaux, reposant sur les notions de relèvements infinitésimaux et de topos cristallin. Cette théorie est parfaitement adaptée à l'étude des schémas lisses sur un corps parfait de caractéristique p, et permet de relier les structures algébriques de ces schémas à des objets en caractéristique nulle, comme les anneaux de Witt ou les anneaux de périodes p-adiques (de Fontaine).

Dans [Fon83], Fontaine présente une lecture de la cohomologie cristalline en l'articulant avec la théorie des représentations p-adiques. Il identifie, en particulier, des conditions sous lesquelles la cohomologie cristalline d'un schéma permet de reconstruire la cohomologie de de Rham de ses relèvements, et donc de relier les invariants géométriques aux représentations p-adiques du groupe de Galois. Ce travail pionnier a ainsi jeté les bases de la théorie de Hodge p-adique, qui s'efforce de comprendre comment les objets géométriques définis sur des corps p-adiques donnent lieu à des représentations filtrées et munies d'une structure de Frobenius.

Néanmoins, la cohomologie cristalline rencontre des limites lorsqu'on sort du cadre des schémas propres et lisses, ou que l'on cherche une théorie mieux adaptée au cadre rigide analytique. C'est dans cette perspective qu'intervient la cohomologie rigide, également développée par Berthelot. Celle-ci étend la portée de la cohomologie cristalline à des schémas non nécessairement propres, en exploitant la géométrie rigide p-adique. Dans une lettre adressée à Jan Nekovář en 2002 ([Ber02b]), Berthelot revient sur les motivations de cette construction.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude comparée de ces deux théories cohomologiques, en nous concentrant sur deux exemples significatifs. Le premier, étudié dans l'article de Fontaine [Fon83], est le schéma $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ dont la cohomologie cristalline révèle des liens profonds avec les anneaux de périodes. Le second, évoqué par Berthelot dans une lettre à Jan Nekovář en 2002 ([Ber02b]), est le schéma $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p)$, qui illustre la cohomologie rigide dans ce cadre. Nous commencerons par analyser la situation du point de vue cristallin au chapitre 1, puis nous aborderons le cadre rigide au chapitre 2.

Notre objectif est de clarifier, à travers ces situations concrètes, les constructions sous-jacentes aux deux théories cohomologiques, et de mettre en évidence leur lien profond avec les anneaux de périodes de Fontaine.

Chapitre 1

Article de Fontaine

Pour la suite, on considèrera les notations suivantes :

▷ k un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$.

▷ $W := W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k.

▷ $K := \mathrm{Frac}(W)$ le corps des fractions de W.

▷ $W_n := W/p^nW$.

▷ σ le Frobenius absolu opérant sur k, W, K, W_n.

On considère $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on notera enfin $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$.

Définition 1.1. On appelle Φ-module filtré un W-module M muni :

i) d'une application $\Phi : M \to M$ qui est σ-semi-linéaire.

ii) d'une filtration décroissante par des sous-W-modules

$$M = \mathrm{Fil}^0 M \supseteq \mathrm{Fil}^1 M \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Fil}^i M \supseteq \mathrm{Fil}^{i+1} M \supseteq \cdots$$

1.1 Définition site cristallin/faisceaux

Définition 1.2. Étant donné X un schéma quelconque sur W . Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $X_n = X \times_{\mathrm{Spec}(W)} \mathrm{Spec}(W_n)$ et $X_k = X \times_{\mathrm{Spec}(W)} \mathrm{Spec}(k)$.

Définition 1.3. On note $(X_n/W_n)_{\mathrm{cris}}$ (resp. $(X_k/W_n)_{\mathrm{cris}}$) le topos associé au site cristallin de X_n (noté $\mathrm{Cris}(X_n/W_n)$) (resp. X_k) relativement à W_n et $\mathcal{O}_{X_n/W_n}$ (resp. $\mathcal{O}_{X_k/W_n}$) le faisceau structural.

Définition 1.4. Pour tout entier $m \geq 0$, on note le W-module :

$$H^m_{\mathrm{cris}}(X_n/W_n) := H^m\left((X_n/W_n)_{\mathrm{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}\right)$$

Définition 1.5. On note enfin pour tout entier $m \geq 0$, le W-module :

$$H^m_{\mathrm{cris}}(X/W) := \varprojlim H^m_{\mathrm{cris}}(X_n/W_n)$$

Définition 1.6. Avec les notations et définitions précédentes pour $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, et $X_n = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}})$, on pose

$$H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n}) := H^m_{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}})/W_n)$$

et

$$H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) := H^m_{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})/W) = \varprojlim H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})$$

1.2 Théorème dû à Fontaine

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant dû à Fontaine dans [Fon83].

Théorème 1.7. *On a*

1. $H^m_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = 0$ *si* $m \geq 1$
2. $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ *est sans* p*-torsion et la projection canonique de* $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ *dans* $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})$ *identifie* $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})/p^n H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ *à* $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})$.

Pour ce faire, nous allons commencer par calculer les $H^m_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Pour cela, considérons L une extension finie de K et $\mathcal{O}_L$ l'anneau de ses entiers. On peut dès lors par [Ser04, Chapitre 3, Proposition 12] choisir $y \in L$ tel que $\mathcal{O}_L = W[y]$. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $\Sigma_{L,n} = W_n[Y]$ l'anneau des polynômes en la variable Y à coefficients dans W_n. Notons enfin, P_n l'image dans $W_n[Y]$ de $\pi_y \in W[Y]$ le polynôme minimal de y.

1.2.1 Réduction aux extensions d'indice de ramification divisible par p^n et remarque essentielle.

Proposition 1.8. *À* n *fixé, l'ensemble des extensions* L/K *dont l'indice de ramification est divisible par* p^n *est cofinal dans l'ensemble des extensions finies de* K *contenues dans* $\overline{K}$.

Démonstration. Soit L/K un extension finie contenue dans $\overline{K}$. On souhaite trouver une extension de L noté $\tilde{L}$ tel que p^n divise l'indice de ramification de $\tilde{L}/K$. Or on sait que

$$e(\tilde{L}/K) = e(\tilde{L}/L) \cdot e(L/K)$$

Ainsi, si $p^n | e(L/K)$, il suffit de considérer $\tilde{L} = L$. Sinon, on considère $\tilde{L}/L$ totalement ramifiée de degré p^n (Celle-ci existe bien, où elle définie par un élément de polynôme minimal un polynôme d'Eisenstein de degré p^n, voir [Ser04, Chapitre 1, Paragraphe 6]), et on a alors $p^n = e(\tilde{L}/L) \mid e(\tilde{L}/K)$. ■

À partir de maintenant on considère donc L une extension finie de K d'indice de ramification divisible par p^n.

Remarque 1.9. Quitte à remplacer K par l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans L, on peut supposer L/K totalement ramifiée et choisir pour y une uniformisante de $\mathcal{O}_L$. Notons alors $ep^n = [L : K]$ le degré de l'extension L/K. Par [Ser04, Chapitre 1, Paragraphe 6], comme L est totalement ramifiée, et y est une uniformisante, on a $uy^{ep^n} = p$ avec $u \in \mathcal{O}_L^\times$, $\deg(P_n) = ep^n$ et où P_n est un polynôme d'Eisenstein. On en déduit donc que $(p, P_n) = (p, Y^{ep^n})$.

Or la W_n-algèbre $\mathcal{O}_{L,n} := \mathcal{O}_L/p^n\mathcal{O}_L$ s'identifie au quotient de la W_n-algèbre lisse $W_n[Y]/(P_n)$ via le morphisme $Y \mapsto y$. Dès lors, notons $D_{L,n} = D_{\Sigma_{L,n}}((P_n))$ l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $\Sigma_{L,n}$ relativement à l'idéal (P_n). Alors [BO78, Théorème 7.1] nous permet d'identifier $H^*_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) := H^*_{\text{cris}}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{L,n})/W_n)$ à la cohomologie du complexe de W_n-modules suivant

$$D_{L,n} \longrightarrow D_{L,n} \bigotimes_{\Sigma_{L,n}} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_{L,n} \bigotimes_{\Sigma_{L,n}} \Omega^i_{\Sigma_{L,n}} \longrightarrow \cdots$$

où si $\gamma_r(x)$ désigne la r-ième puissance divisée de $x \in (P_n)$ et $w \in \Omega^1_{\Sigma_{L,n}}$, on a

$$\mathrm{d}(\gamma_j(x) \otimes w) = \gamma_{j-1}(x) \otimes \mathrm{d}x \cdot w + \gamma_j(x) \otimes \mathrm{d}w$$

Remarque 1.10. La remarque 1.9 est essentielle, car elle nous permet immédiatement de voir que $D_{L,n}$ est aussi égale à $D_{\Sigma_{L,n}}((Y^{ep^n}))$. On travaillera essentiellement plus tard avec cette vision de $D_{L,n}$ pour obtenir des résultats.

1.2.2 Démonstration du cas $m \geq 1$

Remarque 1.11. Dans notre cas, on observe tout d'abord comme W_n est noetherien (provenant de W qui l'est lui-même car k est un corps parfait de caractéristique p) que $\dim_{W_n}(\Sigma_{L,n}) = \dim(W_n[Y]) - \dim(W_n) = 1$. Ainsi pour tout $m \geq 2, \Omega^m_{\Sigma_{L,n}} = 0$.

Proposition 1.12. *Pour $m \geq 1, H^m_{cris}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = 0$.*

Démonstration.

* En effet, par la remarque précédente et l'identification des cohomologies, on obtient déjà pour $m \geq 2$ que $H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) = 0$. Par conséquent en considérant à $\overline{K}$ fixée, un système inductif des extensions finie L de K contenues dans $\overline{K}$, on obtient que $H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n}) = \varinjlim H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) = 0$.
* Pour le cas $m = 1$, On considère $L' = L(y^{1/p^n})$, on a dès lors en notant comme précédemment, mais cette fois pour l'extension L' que $\Sigma_{L',n} = W_n[X^{p^n}]$, ainsi que $\mathcal{O}_{L',n} = W_n[X]/(P_n(X^{p^n}))$ et $D_{L',n} = D_{\Sigma_{L',n}}((P_n(X^{p^n}))$. Or on a :

$$\begin{array}{ccccc}
Y & D_{L,n} & \xrightarrow{d} & D_{L,n} \bigotimes_{\Sigma_{L,n}} \Omega^1_{L,n} & \mathrm{d}Y \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \varphi & \downarrow \\
X^{p^n} & D_{L',n} & \xrightarrow{d} & D_{L',n} \bigotimes_{\Sigma_{L',n}} \Omega^1_{L',n} & \mathrm{d}X^{p^n} = 0
\end{array}$$

  Comme $\varphi(\mathrm{d}Y) = \mathrm{d}(X^{p^n}) = 0$, on a donc que $\varphi = 0$. Ainsi, en considérant $\alpha \in H^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$, alors il existe une extension $L \subseteq L'$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$ dans $H^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L',n})$. Ainsi $H^1_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n}) = 0$.
* On en déduit alors que pour tout $m \geq 1, H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \varprojlim H^m_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n}) = 0$.

■

1.2.3 Démonstration du cas $m = 0$

Il ne reste donc plus qu'à nous intéresser à $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, et pour se faire, on va comme précédemment s'intéresser à $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})$ et donc à $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$.

Définition 1.13. On rappelle qu'étant donné (A, I, γ) un PD-anneau, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I^{[n]}$ la n-ème puissance divisée de I définie par

$$I^{[n]} = \left\langle \gamma_{i_1}(x_1)\gamma_{i_2}(x_2)\ldots\gamma_{i_k}(x_k) \mid \sum i_j \geq n, x_i \in I \right\rangle$$

Notation 1.14.

* $J_{L,n}$ l'idéal à puissances divisées de $D_{L,n}$

* $J_{L,n}^{[i]}$ la i-ème puissance divisée de $J_{L,n}$

On peut alors définir une filtration sur $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$ de la manière suivante :

$$\mathrm{Fil}^i H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) = J_{L,n}^{[i]} \cap H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$$

L'anneau $D_{L,n}$ est aussi l'enveloppe à puissances divisées de $\Sigma_{L,n}$ relativement à l'idéal (p, P_n), compatibles avec les puissances divisées de $p\Sigma_{L,n}$. Considérons $\Phi : \Sigma_{L,n} \to \Sigma_{L,n}$ l'endomorphisme σ-semi-linéaire vérifiant $\Phi(Y) = Y^p$.

Proposition 1.15. *On a*

i) $\Phi((p, P_n)) \subseteq (p, P_n)$. *On peut alors étendre* Φ *à* $D_{L,n}$.

ii) $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$ *est stable par* Φ.

Démonstration.

i) En repartant de la remarque $(p, P_n) = (p, Y^{ep^n})$, alors en utilisant le fait que Φ est σ-semi-linéaire, on obtient immédiatement le premier point.

ii) Considérons $x \in H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$, alors $x \in D_{L,n}$ et vérifie $\mathrm{d}x = 0$. Cependant comme $D_{L,n} = D_{\Sigma_{L,n}}((p, P_n))$ alors $d\Phi(x) = (\Phi \otimes id_{\Omega^1_{\Sigma_{L,n}}}) \circ \mathrm{d}x = 0$, on obtient donc $\Phi(x) \in H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$, d'où $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$ est stable par Φ. ■

Notation 1.16. $\tilde{\mathcal{O}_L} = \mathcal{O}_L / p\mathcal{O}_L = \Sigma_{L,n}/(p, P_n)$

considérons $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$. Pour $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note $\hat{a_r}$ l'image dans $D_{L,n}$ d'un relèvement de a_r dans $\Sigma_{L,n}$.

Proposition 1.17. $p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}}$ *ne dépend pas du choix du relèvement et appartient à* $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$.

Démonstration. Soit $b_1, b_2 \in \Sigma_{L,n}$ tel que $b_1 + (p, P_n) = b_2 + (p, P_n) = a_r$. On a donc $b_1 - b_2 \in (p, P_n)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} p^r b_1^{p^{n-r}} - p^r b_2^{p^{n-r}} &= p^r (p^{n-r})!\,(\gamma_{p^{n-r}}(b_1) - \gamma_{p^{n-r}}(b_2)) \\ &= p^n \times C \in W_n[Y] = \Sigma_{L,n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $p^r b_1^{p^{n-r}} = p^r b_2^{p^{n-r}}$ et donc $p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}}$ ne dépend pas du relèvement.

D'autre part, $d(p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}}) = p^r d(\hat{a_r}^{p^{n-r}}) = p^n d(\hat{a_r}^{p^{n-r}-1}) = 0$ car on est toujours modulo p^n. On a donc finalement obtenu que $p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}} \in H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$. ■

On définit l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{L,n} : & W_n(\tilde{\mathcal{O}_L}) & \longrightarrow & H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) \\ & (a_0, \ldots, a_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{r=0}^{n-1} p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}} \end{array}$$

On peut vérifier que $\alpha_{L,n}$ est un homomorphisme d'anneaux qui ne dépend pas du choix du générateur y de la W-algèbre $\mathcal{O}_L$.

On souhaite tout d'abord dans un premier temps étendre ce morphisme d'anneaux en un morphisme d'algèbres à puissances divisées. On considère pour ce faire l'idéal de $W_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$ formé des $(0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ qui est muni de puissances divisées naturelles (voir par exemple [Ill79, numéro 0.1.4]). On considère maintenant l'idéal $I_n(\tilde{\mathcal{O}_L}) = \left\{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in W_n(\tilde{\mathcal{O}_L}) \mid a_0^{p^n} = 0\right\}$, et on note $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L})$ l'enveloppe à puissance divisées de $W_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$ relativement à l'idéal $I_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$, compatible avec les puissances divisées de l'idéal formé des $(0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Proposition 1.18. $\alpha_{L,n}(I_n(\tilde{\mathcal{O}_L})) \subseteq pD_{L,n} \cap H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$.

Démonstration. Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in I_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha_{L,n}(a_0, \ldots, a_{n-1}) &= \sum_{r=0}^{n-1} p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}} \\
&= \hat{a_0}^{p^n} + \sum_{r=1}^{n-1} p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}} \\
&= \sum_{r=1}^{n-1} p^r \hat{a_r}^{p^{n-r}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha_{L,n}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in pD_{L,n} \cap H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$, ce qui donne la proposition. ■

Cela permet alors d'étendre $\alpha_{L,n}$ en un homomorphisme d'algèbres à puissances divisées $\alpha^{DP}_{L,n} : W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L}) \to H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$

Proposition 1.19. *On peut munir $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L})$ d'une structure de Φ-module filtré*

Démonstration.

* On commence par définir la structure de W-module sur $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L})$. Celle-ci provient de celle sur W_n qui provient par extension des scalaires via σ^{-n}. Étant donné $a \in W, x \in W_n$ l'action est donné par $a \cdot x = \sigma^{-n}(a)x$ où $\sigma^{-n}(a)$ est ici vu après projection sur W_n.
* Φ agit naturellement sur $W_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$ par $\Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (a_0^p, a_1^p, \ldots, a_{n-1}^p)$. De plus, Φ envoie $I_n(\tilde{\mathcal{O}_L})$ dans lui-même. On peut donc étendre Φ en un endomorphisme d'algèbre à puissances divisées de $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L})$.
* Il nous reste à munir $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L})$ d'une filtration. On commence par introduire un homomorphisme

$$\begin{array}{cccc}
\theta_{L,n} : & W_n(\tilde{\mathcal{O}_L}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{L,n} \\
& (a_0, \ldots, a_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{r=0}^{n-1} p^r \tilde{a_r}^{p^{n-r}}
\end{array}$$

où $\tilde{a_r}$ désigne un relèvement de a_r dans $\mathcal{O}_{L,n}$. On commence par observer que (p) étant principal, alors les puissances divisées s'étendent à $\mathcal{O}_{L,n} = W_n[Y]/(P_n)$. D'autre part, comme précédemment, on a $\theta_{L,n}(I_n(\tilde{\mathcal{O}_L})) \subseteq p\mathcal{O}_{L,n}$ qui est l'idéal à puissance divisées de $\mathcal{O}_{L,n}$, alors $\theta_{L,n}$ induit donc un homomorphisme d'algèbres à puissances divisées

$$\theta^{DP}_{L,n} : W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}_L}) \to \mathcal{O}_{L,n}$$

dont le noyau $\ker(\theta_{L,n}^{DP})$ est un idéal à puissance divisée (voir Lemma 07H2).

On définit alors $\mathrm{Fil}^i W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_L) := \ker(\theta_{L,n}^{DP})^{[i]}$. L'ensemble de ces points montre que $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_L)$ est muni d'une structure de Φ-module filtré.

■

Proposition 1.20. *$\alpha_{L,n}^{DP}$ est un isomorphisme de Φ-modules filtrés.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier les deux points suivants :

i) $\alpha_{L,n}^{DP}$ est bijective.

ii) pour tout i, $\alpha_{L,n}^{DP}(\mathrm{Fil}^i W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_L)) = \mathrm{Fil}^i H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, les puissances divisées s'étendent à $\mathcal{O}_{L,n} = W_n[Y]/(P_n)$, ainsi par [BO78, Remarque 4 de 3.20], on obtient un isomorphisme $D_{L,n}/J_{L,n} = W_n[Y]/(P_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{L,n}$. On notera par la suite can l'isomorphisme précédent restreint à $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_L) \arrow[rr, "\alpha_{L,n}^{DP}"] \arrow[dr, "\theta_{L,n}^{DP}"'] & & H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) \arrow[dl, "\mathrm{can}"] \\ & \mathcal{O}_{L,n} & \end{tikzcd}$$

De plus, comme $\mathrm{Fil}^i W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_L) = \ker(\theta_{L,n}^{DP})^{[i]}$ et que $\mathrm{Fil}^i H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) = \ker(\mathrm{can})^{[i]}$. Alors si on montre l'assertion $i)$, l'assertion $ii)$ en résultera. Montrons donc la première assertion.

Comme $\Sigma_{L,n}$ est lisse, on peut former son complexe de De Rham, et on a

$$H^0_{\mathrm{cris}}(\Sigma_{L,n}) = \ker(\Sigma_{L,n} \xrightarrow{d} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}}).$$

On commence par observer que $dY^{ep^n} = ep^n dY^{ep^n-1} = 0$ car on travaille toujours modulo p^n, ainsi $Y^{ep^n} \in H^0_{\mathrm{cris}}(\Sigma_{L,n})$. De plus, on a $\lambda : H^0_{\mathrm{cris}}(\Sigma_{L,n}) \to H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$ un morphisme, et la projection $\pi : H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) \to \tilde{\mathcal{O}}_L$ provenant de la composition des flèches $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) \to \mathcal{O}_{L,n}$ et $\mathcal{O}_{L,n} \to \tilde{\mathcal{O}}_L$. Comme $(p, P_n) = (p, Y^{ep^n})$, alors $Y^{ep^n} = pP + P_n Q$ avec $(P,Q) \in \mathcal{O}_K[Y]$, alors $\lambda(Y^{ep^n}) \in \ker(\pi)$ qui est un idéal à puissances divisées. En effet, $\lambda(Y^{ep^n}) \in D_{L,n} = D_{\Sigma_{L,n}}((Y^{ep^n}))$, il suffit donc de le vérifier pour $\alpha \in \Sigma_{L,n}$ et Y^{ep^n} car après passage aux puissances divisées, $\gamma_m(Y^{ep^n}) \in (Y^{ep^n})$. Or $\pi(Y^{ep^n}) = \pi(pP) + \pi(QP_n) = 0$ par construction de π, de même $\pi(\alpha) = 0$ car la première flèche réduit modulo p^n, et $\alpha \in W_n[Y] = \Sigma_{L,n}$. On a ainsi que $\lambda(Y^{ep^n}) \in \ker(\pi)$. On en déduit alors un homomorphisme $\lambda_{L,n}^{DP}$ de $D_{H^0_{\mathrm{cris}}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n}))$ dans $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})$, celui-ci est même un isomorphisme. En effet, on commence par observer que

$$\Sigma_{L,n} = W_n[Y] \stackrel{(*)}{=} W_n[Y^{ep^n}] \cdot 1 \oplus \cdots \oplus W_n[Y^{ep^n}] \cdot Y^{ep^n-1} \tag{1.1}$$

Ainsi $\Sigma_{L,n}$ est donc un $W_n[Y^{ep^n}]$-module libre donc plat. De plus, pour $P \in \Sigma_{L,n}$, alors par 1.1, on peut écrire $P(Y) = \sum_{i=0}^{ep^n-1} a_i(Y^{ep^n})Y^i$ avec $a_i(Y^{ep^n}) \in W_n[Y]$. En dérivant, on observe que

$$P'(Y) = \sum_{i=0}^{ep^n-1} ia_i(Y^{ep^n})Y^{i-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{ep^n-1} a_i'(Y^{ep^n})Y^i}_{=0 \text{ car } a_i'(Y^{ep^n})=0 \text{ dans } W_n[Y]}$$
$$= \sum_{i=0}^{ep^n-1} ia_i(Y^{ep^n})Y^{i-1}$$

On tire donc que

$$\mathrm{d}P = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{ep^n-1} ia_i(Y^{ep^n})Y^{i-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow P = a_0(Y^{ep^n}) \in W_n[Y]$$

Ainsi le complexe $\Sigma_{L,n} \xrightarrow{d} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}}$ est $W_n[Y^{ep^n}]$-linéaire, alors en tensorisant par $D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n}))$, on obtient le complexe

$$\Sigma_{L,n} \bigotimes_{W_n[Y^{ep^n}]} D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n})) \xrightarrow{d} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}} \bigotimes_{W_n[Y^{ep^n}]} D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n}))$$

Or comme $W_n[Y]$ est libre sur $W_n[Y^{ep^n}]$ donc plat, alors par [BO78, proposition 3.21],

$$D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n})) \otimes_{W_n[Y^{ep^n}]} W_n[Y] \simeq D_{W_n[Y]}((Y^{ep^n}))$$

on a de même que

$$D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n})) \otimes_{W_n[Y^{ep^n}]} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}} \simeq D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n})) \otimes_{W_n[Y^{ep^n}]} W_n[Y] \otimes_{W_n[Y]} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}}$$
$$\simeq D_{W_n[Y]}((Y^{ep^n})) \otimes_{W_n[Y]} \Omega^1_{\Sigma_{L,n}}$$

Ainsi,

$$H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) = \ker\left(\Sigma_{L,n} \otimes_{W_n[Y^{ep^n}]} D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n})) \to \Omega^1_{\Sigma_{L,n}} \otimes_{W_n[Y^{ep^n}]} D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n}))\right)$$
$$= H^0_{\text{cris}}(\Sigma_{L,n}) \otimes_{W_n[Y^{ep^n}]} D_{W_n[Y^{ep^n}]}((Y^{ep^n}))$$

Or en réutilisant [BO78, proposition 3.21], on obtient bien que $H^0_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{L,n}) \simeq D_{H^0_{\text{cris}}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n}))$ car $H^0_{\text{cris}}(\Sigma_{L,n})$ est libre donc plat sur $W_n[Y^{ep^n}]$.

Or, on a $\Sigma_{L,n}/p\Sigma_{L,n} = k[Y]$ et $\Sigma_{L,n}$ est lisse sur W_n, alors par [IR83, Chapitre III, Proposition I.4], le morphisme suivant est un isomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \eta_{L,n} : & W_n(k[Y]) & \longrightarrow & H^0_{\text{cris}}(\Sigma_{L,n}) \\ & [Y^e] := (Y^e, 0, \ldots, 0) & \longmapsto & Y^{ep^n} \end{array}$$

Il induit donc un isomorphisme d'algèbres à puissances divisées

$$\eta^{DP}_{L,n} : D_{W_n(k[Y])}(([Y^e])) \to D_{H^0_{\text{cris}}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n}))$$

Or pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, en notant comme usuellement sur les vecteurs de Witt, $F : W_n \to W_{n-1}$ le Frobenius et $V : W_{n-1} \to W_n$ l'opérateur de décalage, alors comme k de caractéristique p,on a $FV = VF = p$ et

$$\begin{aligned}\eta^{DP}_{L,n}((0, \dots, 0, Y^{ep^n}, 0, \dots, 0)) &= \eta^{DP}_{L,n}(V^r \circ F^n([Y^e])) \\ &= \eta^{DP}_{L,n}((VF)^r \circ F^{n-r}([Y^e])) \\ &= \eta^{DP}_{L,n}(p^r([Y^e])^{p^{n-r}}) \\ &= p^r \cdot (p^{n-r})!\, \gamma_{p^{n-r}}([Y^e]) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $D_{W_n(k[Y])}(([Y^e]))$ s'identifie à $D_{W_n(k[Y]/(Y^{ep^n}))}(([Y^e]))$. On a donc finalement obtenu un isomorphisme

$$\begin{tikzcd}\alpha'^{DP}_{L,n} : D_{W_n(k[Y]/(Y^{ep^n}))}(([Y^e])) \arrow[r, "\sim"] & D_{W_n(k[Y])}(([Y^e])) \arrow[r, "\sim", "\eta^{DP}_{L,n}"'] & D_{H^0_{\mathrm{cris}}(\Sigma_{L,n})}((Y^{ep^n})) \arrow[d, "\lambda^{DP}_{L,n}"', "\wr"] \\ & & H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{L,n})\end{tikzcd}$$

Or $k[Y]/(Y^{ep^n}) \simeq \Sigma_{L,n}/(p, Y^{ep^n}) \simeq \Sigma_{L,n}/(p, P_n) \simeq \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \simeq \tilde{\mathcal{O}}_L$, et comme l'idéal de $W_n(\tilde{\mathcal{O}}_L)$ engendré par $[Y^e]$ et les $(0, a_1, \dots, a_{n-1})$ n'est autre que $I_n(\tilde{\mathcal{O}}_L)$, alors $D_{W_n(k[Y]/(Y^{ep^n}))}(([Y^e]))$ s'identifie à $W^{DP}_n(\tilde{\mathcal{O}}_L)$. On a alors l'identification de $\alpha'^{DP}_{L,n}$ et $\alpha^{DP}_{L,n}$ ce qui nous assure donc l'assertion i). ■

En notant $\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}} = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$, on a $W_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \varinjlim W_n(\mathcal{O}_L)$ pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$. Notons enfin $W^{DP}_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) = D_{W_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})}(I_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}))$ l'enveloppe à puissances divisées relativement à l'idéal (avec les mêmes notations que précédemment) $I_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) = \left\{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in W_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) \mid a_0^{p^n} = 0\right\}$ compatibles avec les puissances divisées naturelles des $(0, a_1, \dots, a_{n-1})$. On a

$$W^{DP}_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) = \varinjlim W^{DP}_n(\tilde{\mathcal{O}}_L).$$

La proposition précédente et les différentes remarques impliquent :

Corollaire 1.21. *Par passage à la limite, les $\alpha^{DP}_{L,n}$ induisent un isomorphisme de Φ-modules filtrés $\alpha^{DP}_n : W^{DP}_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) \to H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})$.*

Définition 1.22. On définit $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}^{\wedge}_{\overline{K}} = \varprojlim \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$.

Notation 1.23. Pour $a \in \mathcal{O}_C$, on notera $\tilde{a}$ son image dans $\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}} := \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$.

Définition 1.24. On note et appelle $\mathcal{O}^\flat_C := \left\{(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_C^{\mathbb{N}},\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\}$.

Proposition 1.25. *$\mathcal{O}^\flat_C$ est muni d'une structure d'anneau commutatif en posant les opérations suivantes :*

1. $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} + (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\lim\limits_{m\to+\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (x^{(n)}y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 1.26. *Par l'application* $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\widetilde{x^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$*, on a une identification entre* $\mathcal{O}_C^\flat$ *et* $\varprojlim_{x\mapsto x^p} \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}$.

Démonstration.

▷ <u>injectivité :</u> Soit $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_C^\flat$ tel que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}, \widetilde{x^{(n)}}. = \widetilde{y^{(n)}}$, alors $x^{(n)} = y^{(n)} \mod p$ et donc par récurrence, on obtient que pour tout $i \in \mathbb{N}, (x^{(n+i)})^{p^i} = (y^{(n+i)})^{p^i} \mod p^{i+1}$. Alors, par définition de $\mathcal{O}_C^\flat$, on obtient que pour tout $i \in \mathbb{N}, x^{(n)} = y^{(n)} \mod p^{i+1}$, et comme $\mathcal{O}_C$ est p-adiquement séparé, $x^{(n)} = y^{(n)}$.

▷ <u>surjectivité :</u> Soit $(\widetilde{y^{(n)}})_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}$, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}, y^{(n)} \in \mathcal{O}_C$ un relèvement de $\widetilde{y^{(n)}}$. Alors $(y^{(n+1)})^p = y^{(n)} \mod p$, on a donc que pour tout $n \in \mathbb{N}, \lim_{m\to+\infty} (y^{(n+m)})^{p^m}$ existe dans $\mathcal{O}_C$ et est indépendant du choix de relèvement. Notons $x^{(n)}$ cette limite, on obtient que $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_C^\flat$ et que $\widetilde{x^{(n)}} = \widetilde{y^{(n)}}$.

■

Remarque 1.27.

∗ $\mathcal{O}_C^\flat$ est parfait de caractéristique p et l'application suivante permet d'identifier k à un sous-corps de $\mathcal{O}_C^\flat$.

$$\begin{array}{rccc} \iota: & k & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^\flat \\ & \varepsilon & \longmapsto & (\varepsilon^{p^{-n}})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

∗ On en déduit alors que l'anneau $W(\mathcal{O}_C^\flat)$ est donc un W-algèbre sans p-torsion et s'identifie à un sous-anneau de $W_K(\mathcal{O}_C^\flat) := K \otimes_W W(\mathcal{O}_C^\flat)$.

∗ Fontaine a montré ([Fon82, proposition 2.4]) que l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta^0: & W(\mathcal{O}_C^\flat) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(n)} \end{array}$$

est un homomorphisme surjectif dont le noyau est un idéal principal dont on notera ξ_0 un générateur.

Notation 1.28. On note $S' = D_{W(\mathcal{O}_C^\flat)}((\ker(\theta^0))$. C'est le sous-$W(\mathcal{O}_C^\flat)$-module de $W_K(\mathcal{O}_C^\flat)$ engendré par les $\gamma_n(\xi_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Notation 1.29. Enfin, on note $A_{\text{cris}} := S'^\wedge = D_{W(\mathcal{O}_C^\flat)}((\ker(\theta^0))^\wedge = \varprojlim S'/p^n S'$ le séparé complété de S' pour la topologie p-adique.

Remarque 1.30. A_{cris} est muni d'une structure naturelle de Φ-module filtré. En effet, on commence par observer que $\Phi(\ker(\theta^0)) \subseteq \ker(\theta^0) + (p)$, ainsi l'action naturelle de Φ sur $W(\mathcal{O}_C^\flat)$ s'étend à S' et donc à A_{cris}. La filtration sur A_{cris} est donné par l'adhérence de la i-ème puissance divisée de S' (i.e. $\mathrm{Fil}^i A_{\text{cris}} = \overline{S'^{[i]}}$).

Proposition 1.31. *L'application suivante*

$$\begin{array}{rccc} \beta_n: & W(\mathcal{O}_C^\flat) & \longrightarrow & W_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) \\ & (x_0, x_1, \ldots) & \longmapsto & (\widetilde{x_0^{(n)}}, \widetilde{x_1^{(n)}}, \ldots, \widetilde{x_{n-1}^{(n)}}) \end{array}$$

est un épimorphisme d'anneaux dont l'image de $\ker(\theta^0) + pW(\mathcal{O}_C^\flat)$ *est l'idéal* $I_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$.

Démonstration.

* Commençons par montrer le caractère surjectif de β_n. Étant donné $i \in [\![0, n-1]\!]$, si $\widetilde{x_i^{(n)}}$ est connu, alors les $\widetilde{x_i^{(j)}}$ pour $j \leq n$ sont connus car $\widetilde{x_i^{(n-j)}} = (\widetilde{x_i^{(n)}})^{p^j}$. De plus, comme $\overline{K}$ est algébriquement clos, on peut extraire des racines p^k-èmes dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. On peut donc pour $x_i^{(n)}$, extraire une racine p^k-ème dans $\mathcal{O}_K$, et on pose $\widetilde{x_i^{(n+k)}}$ cette racine prise modulo $p\mathcal{O}_{\overline{K}}$. On obtient ainsi un $x_i \in W(\mathcal{O}_C^\flat)$. Par cette construction, on obtient $\beta_n(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots) = (\widetilde{x_0^{(n)}}, \widetilde{x_1^{(n)}}, \ldots, \widetilde{x_{n-1}^{(n)}})$
* Vérifions maintenant que $\beta_n(\ker(\theta^0) + pW(\mathcal{O}_C^\flat)) = I_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$. Considérons pour cela $\alpha \in \ker(\theta^0) + pW(\mathcal{O}_C^\flat)$, comme $\mathcal{O}_C^\flat$ est parfait de caractéristique p, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\alpha &= (\xi_0) + (0, a_0, a_1, \ldots) \text{ où } a_i \in \mathcal{O}_C^\flat \\ &= (\xi_{0,0}, \xi_{0,1}, \ldots) + (0, a_0, a_1, \ldots)\end{aligned}$$

Pour vérifier que $\beta_n(\alpha)$ est un élément de $I_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$, il suffit de s'intéresser à la première composante. Or la première composante de $\beta_n(\alpha)$ est donc $\widetilde{\xi_{0,0}^{(n)}}$. Comme $\xi_0 \in \ker(\theta^0)$, donc $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \xi_{0,i}^{(i)} p^i = 0$ et donc $\xi_{0,0}^{(0)} = -\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \xi_{0,i}^{(i)} p^i \in p\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Ainsi $\widetilde{\xi_{0,0}^{(0)}} = 0$ et donc $\left(\widetilde{\xi_{0,0}^{(n)}}\right)^{p^n} = \widetilde{\xi_{0,0}^{(0)}} = 0$, ce qui nous assure que $\beta_n(\alpha) \in I_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$.

■

Proposition 1.32. *Dès lors, β_n induit un homomorphisme*

$$\beta_n^{DP} : A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}} \to W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$$

qui est un isomorphisme de Φ-modules filtrés.

Démonstration. D'après les propriétés de la complétion p-adique, on a tout d'abord que $A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}} = S'/p^n S'$. De plus, d'après les propriétés des vecteurs de Witt, on a immédiatement que $p^n W(\mathcal{O}_C^\flat) \in \ker(\beta_n)$. Ainsi β_n induit bien un homomorphisme surjectif de Φ-modules filtrés

$$\beta_n^{DP} : A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}} \twoheadrightarrow W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$$

$A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$ est muni de la filtration J-adique où $J = \ker(\theta^0) + pW(\mathcal{O}_C^\flat)$ et on a $J^{[n]} = 0$. On a ainsi

$$0 = J^{[n]} \subseteq J^{[n-1]} \subseteq \cdots \subseteq J^{[1]} \subseteq J^{[0]} = A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$$

De l'autre côté, on a $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$ qui est munie de la filtration I_n-adique, et β_n^{DP} envoie $J^{[i]}$ sur $I_n^{[i]}$. On obtient donc un morphisme surjectif sur les gradués

$$\beta_n^{DP,i} : J^{[i]}/J^{[i+1]} \twoheadrightarrow I_n^{[i]}/I_n^{[i+1]}$$

Les filtrations étant exhaustives, on a : β_n^{DP} est un isomorphisme si et seulement si pour tout $i \leq n$, $\beta_n^{DP,i}$ est un isomorphisme. Ainsi pour montrer la proposition, il nous suffit de montrer l'injectivité de $\beta_n^{DP,i}$. Or, on a d'une part que $J^{[i]}/J^{[i+1]}$ est un

S'/J-module, et d'autre part que $I_n^{[i]}/I_n^{[i+1]}$ qui est un $W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})/I_n$-module. Or, on a par construction de β_n que

$$\mathcal{O}_C \simeq W(\mathcal{O}_C^\flat)/(\ker(\theta^0) + pW(\mathcal{O}_C^\flat)) \simeq W_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})/I_n$$

Mais par la remarque 4 de 3.20 de [BO78], on a aussi

$$S'/J \simeq W(\mathcal{O}_C^\flat)/\ker(\theta^0) + pW(\mathcal{O}_C^\flat) \text{ et } W_n^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})/I_n \simeq W_n(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})/I_n.$$

Ainsi les ensembles de départ et d'arrivée de $B_n^{DP,i}$ sont des $\mathcal{O}_C$-modules. Or par [Ber14, proposition 1.5.1], on a $J^{[i]}/J^{[i+1]} = \mathcal{O}_C \cdot \gamma_i(\xi_0)$. De même, on a $I_n = (\beta_n(\xi_0), p)$ et donc par la même proposition que $I_n^{[i]}/I_n^{[i+1]} = \mathcal{O}_C \cdot \gamma_i(\beta_n(\xi_0))$. On a donc une application surjective entre deux $\mathcal{O}_C$-modules libre de rang 1. Ainsi pour tout $i \leq n$, $\beta_n^{DP,i}$ est donc injective et est un isomorphisme. On obtient ainsi le caractère isomorphe de β_n^{DP}. ■

Remarque 1.33. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
A_{\mathrm{cris}}/p^{n+1}A_{\mathrm{cris}} & \xrightarrow{\beta_{n+1}^{DP}} & W_{n+1}^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{\alpha_{n+1}^{DP}} & H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n+1}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
A_{\mathrm{cris}}/p^{n}A_{\mathrm{cris}} & \xrightarrow[\beta_{n}^{DP}]{} & W_{n}^{DP}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) & \xrightarrow[\alpha_{n}^{DP}]{} & H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})
\end{array}$$

Corollaire 1.34. *Par passage à la limite, les $\alpha_n^{DP} \circ \beta_n^{DP}$ permettent d'identifier A_{cris} et $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$.*

On peut maintenant conclure la preuve de l'assertion $ii)$ du théorème 1.7. En effet, on a obtenu que $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ s'identifie à A_{cris} qui est sans p-torsion car $W(\mathcal{O}_C^\flat)$ était sans p-torsion et que A_{cris} est le séparé complété de $S' = D_{W(\mathcal{O}_C^\flat)}(\ker(\theta^0))$. On a de plus obtenue l'identification via projection de $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K},n})$ et $A_{\mathrm{cris}}/p^nA_{\mathrm{cris}}$ donc de $H^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})/p^nH^0_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$.

Chapitre 2

Lettre de Berthelot à Nekovar

Notation 2.1.

- ▷ $\overline{S_0} = \mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$
- ▷ $\mathcal{O}_C^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}$

2.1 Définitions et objectif de ce chapitre

Définition 2.2.

$$R\Gamma_{\mathrm{rig}}(\overline{S_0}) := R\varprojlim_m (R\Gamma_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W) \otimes \mathbb{Q})$$

L'objectif de ce deuxième chapitre est d'étudier la lettre adressée à Nekovar par Berthelot ([Ber02b]) concernant l'étude de la cohomologie rigide de $\overline{S_0}$ comme limite des cohomologies cristallines de niveau m. Il énonce notamment le théorème suivant dont la preuve sera l'objectif principal de ce chapitre.

Théorème 2.3. *On a les deux faits suivants*

i) Il existe un isomorphisme canonique $H^0_{\mathrm{rig}}(\overline{S_0}) \simeq B^+$

ii) Pour tout $n > 0$*,* $H^n_{\mathrm{rig}}(\overline{S_0}) = 0$.

2.1.1 Rappel sur l'anneau B^+

Définition 2.4. Pour tout idéal $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_c^\flat$, on pose

$$S_{\mathfrak{a}} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [v_n]\, p^n \in W(\mathcal{O}_C^\flat) \otimes \mathbb{Q} \mid \forall n < 0, v_n \in \mathfrak{a}^{-n} \right\}$$

où $[v_n]$ est le représentant de Teichmüller de v_n. On notera pour la suite $\widehat{S_{\mathfrak{a}}}$ sa complétion p-adique et on notera $B^+_{\mathfrak{a}} = \widehat{S_{\mathfrak{a}}} \otimes \mathbb{Q}$.

Proposition 2.5. *(voir [Fon82, proposition 4.4]). Si* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ *sont deux idéaux de* $\mathcal{O}_C^\flat$*, alors l'application* $\widehat{S_{\mathfrak{a}}} \to \widehat{S_{\mathfrak{a}'}}$ *est injective.*

Définition 2.6. $B^+ = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_C^\flat} B^+_{\mathfrak{a}}$.

2.1.2 Calcul de $R\Gamma_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W)$

Remarque 2.7. On commence par l'observation suivante : $R\Gamma_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W)$ peut-être calculé comme dans le cas $m=0$ au sens suivant :

$$R\Gamma_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W) = R\varprojlim_i R\Gamma_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W_i)$$

Proposition 2.8. *Pour tout i, le W_i-schéma $\mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat))$ est formellement étale sur $\mathrm{Spec}(W_i(k))$. Ainsi, la surjection canonique $W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}$ définit une immersion fermée tel que le PD-voisinage correspondant est un objet final du site cristallin (de niveau m) $\mathrm{Cris}_{(m)}(\overline{S_0}/W_i)$.*

Démonstration.

— Montrer que $\mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat)) \to \mathrm{Spec}(W_i(k))$ est formellement étale est équivalent à montrer que le morphisme d'anneaux $W_i(k) \to W_i(\mathcal{O}_C^\flat)$ est formellement étale. Cela revient donc à montrer que pour tout diagramme commutatif suivant où B est une $W_i(k)$-algèbre et $I \subseteq B$ idéal tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}, I^n = 0$:

$$\begin{tikzcd} W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed] & B/I \\ W_i(k) \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Il existe une flèche $W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to B$ (en pointillé) faisant commuter l'ensemble du diagramme. Construisons celle-ci, soit $r = (r_0, \dots, r_{i-1}) \in W_i(\mathcal{O}_C^\flat)$, on note pour tout $k \in [\![0, i-1]\!]$, $\hat{r_k} \in B$ un relèvement de $h([r_k])$ où $[r_k]$ correspond au représentant de Teichmüller de $r_k \in O_C^\flat$. Définissons :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\theta}_0 : & W_i(\mathcal{O}_C^\flat) & \longrightarrow & B \\ & (r_0, \dots, r_{i-1}) & \longmapsto & \sum_{k=0}^{i-1} \hat{r_k}^{p^{i-k}} p^k \end{array}$$

Cette flèche est bien définie et indépendante du choix de relèvement fait. En effet, I est muni d'une PD-structure, et B comme W_i algèbre, donne donc que la preuve de l'indépendance du relèvement est la même qu'en proposition 1.17 du chapitre 1. Notons enfin $\theta_B = \widetilde{\theta}_0 \circ F^{-i} : W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to B$ où F est le Frobenius sur $W_i(\mathcal{O}_C^\flat)$ qui est un automorphisme car $\mathcal{O}_C^\flat$ anneau parfait de caractéristique p. On obtient dès lors par construction que cette flèche fait commuter le diagramme, on a donc bien le caractère formellement étale.

— Comme $W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}$ est surjective, alors $i : \mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}}) \to \mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat))$ définit une immersion fermée de W_i-schémas. On considère alors le PD-voisinage correspondant noté $D(J_i) = \mathrm{Spec}(P_{(m)}(J_i))$ (où $P_{(m)}(J_i)$ est l'enveloppe à puissance divisée de niveau m de J_i où $J_i = \ker(W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$) et montrons que c'est un objet final du site cristallin de niveau m. Commençons par monter que $D(J_i) \in \mathrm{Cris}_{(m)}(\overline{S_0}/W_i)$. Par [BO78, page 3.19], l'immersion fermée i de W_i-schémas se factorise en une immersion fermée $j : \overline{S_0} \to D(J_i)$ de noyau $\overline{J_i}$ qui est un m-PD-idéal, on a donc :

$$\begin{tikzcd} \overline{S_0} \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \overline{S_0} \arrow[d] \\ D(J_i) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(W_i(k)) \end{tikzcd}$$

Ainsi $D(J_i) \in \mathrm{Cris}_{(m)}(\overline{S_0}/W_i)$. Montrons maintenant que c'est bien un objet final du site, et considérons donc $T = (U \xrightarrow{\iota} T, \delta) \in \mathrm{Cris}(\overline{S_0}/W_i)$, comme le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & \overline{S_0} \arrow[r, "i"] & \mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat)) \arrow[d] \\ T \arrow[rr] & & \mathrm{Spec}(W_i(k)) \end{tikzcd}$$

et que $\mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat)) \to \mathrm{Spec}(W_i(k))$ est formellement étale, alors comme $U \to T$ est un épaississement nilpotent, il existe une unique flèche $T \to \mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat))$ faisant commuter l'ensemble du diagramme. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & \overline{S_0} \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "j"] & \\ T \arrow[r] & \mathrm{Spec}(W_i(\mathcal{O}_C^\flat)) & D(J_i) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

alors par propriété universelle de $D(J_i)$, comme $U \to T$ est une immersion fermée telle que $I = \ker(\iota^\sharp)$ définissant celle-ci est un m-PD-idéal, on obtient $T \to D(J_i)$ et donc un morphisme dans $\mathrm{Cris}_{(m)}(\overline{S_0}/W_i)$, ainsi $D(J_i)$ est un objet final du site.

■

Corollaire 2.9.

i) $H^0_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W_i) = P_{(m)}(J_i)$ *où* $P_{(m)}(J_i)$ *est l'enveloppe à puissances divisées de niveau* m *de* $J_i = \ker(W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}})$.

ii) Pour $n \geq 1$, $H^n_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W_i) = 0$.

Démonstration. Dans la proposition précédente, on a vu que $D(J_i) = \mathrm{Spec}(P_{(m)}(J_i))$ est un objet final du site cristallin, alors $\mathrm{Hom}(\_, D(J_i))$ est un objet final du topos. Dès lors, on a par [BO78, page 5.15] que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H^n_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W_i) &= H^n_{\mathrm{cris},(m)}((S_0/W_i)_{\mathrm{cris},(m)}, \mathcal{O}_{\overline{S_0}/W_i}) \\ &= R^n\Gamma(\mathrm{Hom}(\_, \mathrm{Spec}(P_{(m)}(J_i))), \mathcal{O}_{\overline{S_0}/W_i}) \\ &= R^n\Gamma(\mathrm{Spec}(P_{(m)}(J_i)), \mathcal{O}_{D(J_i)}) \end{aligned}$$

Or le foncteur de section globale pour les faisceaux quasi-cohérents est exact sur les schémas affines, on tire donc que :

$$H^n_{\mathrm{cris},(m)}(\overline{S_0}/W_i) = \begin{cases} P_{(m)}(J_i) & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

■

Dans le chapitre 1 en remarque 1.27, on a une application $\theta^0 : W(\mathcal{O}_C^\flat) \to \mathcal{O}_C$. Celle-ci est un relèvement de $W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to \tilde{\mathcal{O}}_{\overline{K}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_C$. En notant $\theta_i : W_i(\mathcal{O}_C^\flat) \to \mathcal{O}_{\overline{K},i}$ la réduction modulo p^i de l'application θ^0, $I = \ker(\theta^0)$ et $I_i = \ker(\theta_i)$, alors on a

$J_i = I_i + pW_i(\mathcal{O}_C^\flat)$. On obtient donc par compatibilité avec les puissances divisées de p que

$$P_{(m)}(J_i) = P_{(m)}(I_i) = P_{(m)}(I)/p^i P_{(m)}(I)$$

Alors en utilisant le corollaire 2.9 et la remarque 2.7, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.10.

i) $H^0_{\text{cris},(m)}(\overline{S_0}/W) = \widehat{P_{(m)}(I)}$.

ii) *Pour* $n \geq 1, H^n_{\text{cris},(m)}(\overline{S_0}/W) = 0$.

2.1.3 Réduction du théorème

Notation 2.11. Notons pour la suite $A_{\text{cris},(m)} = \widehat{P_{(m)}(I)}$ et $B^+_{\text{cris},(m)} = A_{\text{cris},(m)} \otimes \mathbb{Q}$ de tel sorte qu'on retrouve comme dans l'article de Fontaine que $A_{\text{cris}} = A_{\text{cris},(0)}$ et $B^+_{\text{cris}} = B^+_{\text{cris},(0)}$.

Proposition 2.12. *Les flèches de transitions* $A_{\text{cris},(m+1)} \to A_{\text{cris},(m)}$ *sont injectives. En particulier en passant à la limite projective, on obtiendra l'intersection.*

Démonstration.

▷ Par définition des algèbres à puissances divisées de niveau m, on a

$$P_{(m)}(I) = P_{(0)}(I^{(p^m)}) = P_{(0)}(I^{(p^m)} + pW(\mathcal{O}_C^\flat))$$

De plus, la m-ième itérée du Frobenius ϕ qui est un automorphisme de $W(\mathcal{O}_C^\flat)$ induit un isomorphisme semi-linéaire de $A_{\text{cris},(0)}$ dans $A_{\text{cris},(m)}$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & A_{\text{cris},(0)} \arrow[r, "\sim", "\phi^m"'] & A_{\text{cris},(m)} \\ A_{\text{cris},(0)} \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\sim", "\phi"'] & A_{\text{cris},(1)} \arrow[u, "can."'] \arrow[r, "\sim", "\phi^m"'] & A_{\text{cris},(m+1)} \arrow[u, "can."'] \end{tikzcd}$$

Or le triangle gauche du diagramme est commutatif, et ϕ est injectif sur A_{cris} donc $\mathrm{can.} : A_{\text{cris},(1)} \to A_{\text{cris}}$ est injectif. Or, comme le rectangle du diagramme est commutatif, on en déduit que $\mathrm{can.} : A_{\text{cris},(m+1)} \to A_{\text{cris},(m)}$ est donc injectif. ■

On a ainsi obtenu :

$$\begin{tikzcd} B^+_{\text{cris},(m+1)} \arrow[r, hook, dashed] & B^+_{\text{cris},(m)} \\ A_{\text{cris},(m+1)} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & A_{\text{cris},(m)} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On utilise les flèches de transition par identification pour travailler dans B^+_{cris}. Pour démontrer le théorème 2.3, on est donc ramener maintenant à montrer la proposition suivante : (la réduction du deuxième point provient du fait que plus généralement $R^i \varprojlim = 0$ pour tout $i \geq 2$).

Proposition 2.13.

i) $\bigcap_m B^+_{\mathrm{cris},(m)} = B^+$.

ii) $R^1 \varprojlim_m B^+_{\mathrm{cris},(m)} = 0$.

2.1.4 Démonstration du point i)

En réutilisant les notations de la sous-section 2.1.1 sur l'anneau B^+. On part cette fois de la vision de l'anneau $\mathcal{O}_C^\flat$ comme étant l'ensemble des suites $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{O}_C$ tel que $(u^{(n+1)})^p = u^{(n)}$. Considérons alors $u \in \mathcal{O}_C^\flat$ tel que $u^{(0)} = -p$. Posons dès lors $\alpha := [u] + p$. Alors α est un générateur de $I = \ker(\theta^0)$ (voir [Fon82, proposition 2.4]).

En posant $\mathfrak{a} = (u) \subseteq \mathcal{O}_C^\flat$, alors $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des éléments de valuation supérieure ou égale à 1. (la valuation est définie par celle du premier terme comme dans [Fon82]).

Notons $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ l'idéal engendré par u^{p^n}.

Proposition 2.14. $B^+ = \bigcap_n B^+_{\mathfrak{a}_\mathfrak{n}}$

Démonstration.

$\subseteq$: Pour tout $n \geq 0$, l'idéal $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ est propre donc $\{\mathfrak{a}_\mathfrak{n}, n\in\mathbb{N}\} \subseteq \{J \subseteq \mathcal{O}_C^\flat, J \text{ idéal propre}\}$. On obtient ainsi $B^+ \subseteq \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_{\mathfrak{a}_\mathfrak{n}}$.

$\supseteq$: Soit $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_{\mathfrak{a}_\mathfrak{n}}$. Soit $J \subseteq \mathcal{O}_C^\flat$ un idéal propre, Par la proposition 2.5, il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} \subseteq J$ pour pouvoir conclure. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} \not\subseteq J$. Alors comme $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{a}_\mathfrak{n} = \{0\}$ et $(\mathfrak{a}_\mathfrak{n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{a}_{n_0} \cap J = \{0\}$. Cela revient à dire que tout élément non nul x de J est de valuation strictement plus petite à n_0. Or $u^{n_0}x \in J$ car J est un idéal et $v(u^{n_0}x) = n_0 v(u) + v(x) \geq n_0$ car $x \in J \subseteq \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C^\flat$ (qui est un anneau local d'idéal maximal l'ensemble des éléments de valuations supérieur ou égale à 0, voir [Car19, page 31]). On obtient ainsi une contradiction.

■

Or par [Fon82, Proposition 4.2], comme $\mathfrak{a}_\mathfrak{n} = (u^{p^n})$ est principal et α^{p^n} de premier terme $[u^{p^n}]$ alors $S_{\mathfrak{a}_\mathfrak{n}} = W(\mathcal{O}_C^\flat)\left[\frac{\alpha^{p^n}}{p}\right]$. On définit dès lors deux applications pour tout $m \geq 0$:

$$\begin{array}{rccl} \lambda : & W(\mathcal{O}_C^\flat)\left[\frac{\alpha^{p^{m+1}}}{p}\right] & \longrightarrow & P_{(m)}(I) = P_{(0)}(\alpha^{p^m}) \\ & \frac{\alpha^{p^{m+1}}}{p} & \longmapsto & (p-1)!\,\gamma_p(\alpha^{p^m}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \nu : & P_{(m)}(I) & \longrightarrow & W(\mathcal{O}_C^\flat)\left[\frac{\alpha^{p^m}}{p}\right] \\ & \gamma_k(\alpha^{p^m}) & \longmapsto & \left(\frac{p^k}{k!}\right)\left(\frac{\alpha^{p^m}}{p}\right)^k \end{array}$$

Ces deux applications s'étendent aux complétions p-adiques si bien qu'en les regardant comme des sous-anneaux de A_{cris}, on a

$$\widehat{S_{\mathfrak{a}_{m+1}}} \subseteq A_{\text{cris},(m)} = \widehat{P_{(m)}(I)} \subseteq \widehat{S_{\mathfrak{a}_m}}$$

D'où on obtient

$$B^+_{\mathfrak{a}_{m+1}} \subseteq B^+_{\text{cris},(m)} \subseteq B^+_{\mathfrak{a}_m}$$

Ainsi on obtient finalement via la proposition 2.14 que $B^+ = \bigcap_m B^+_{\mathfrak{a}_m} = \bigcap_m B^+_{\text{cris},(m)}$, ce qui conclut la démonstration du point i).

2.1.5 Démonstration du point ii)

Pour $m' \geq m$, notons $\rho_{m',m} : B^+_{\text{cris},(m)} \hookrightarrow B^+_{\text{cris},(m)}$ les flèches de transitions obtenues comme précédemment (voir [Ber14, point 1.4.7]).

Définition 2.15. On note pour tout $m \geq 1$, $C_m = \prod_{m' \leq m} B^+_{\text{cris},(m')}$ et $D_m = \prod_{m' < m} B^+_{\text{cris},(m')}$

On définit trois applications, une faisant le lien entre $B^+_{\text{cris},(m)}$ et C_m et deux autres faisant le lien entre C_m et D_m.

$$\begin{array}{rccl} \delta_m : & B^+_{\text{cris},(m)} & \longrightarrow & C_m \\ & x & \longmapsto & (\rho_{0,m}(x), \rho_{1,m}(x), \dots, \rho_{m,m}(x) = x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \rho_m : & C_m & \longrightarrow & D_m \\ & x & \longmapsto & (\rho_{0,1}(x_1), \dots, \rho_{m',m'+1}(x_{m'+1}), \dots, \rho_{m-1,m}(x_m)) \end{array}$$

et $\pi_m : C_m \to D_m$ l'application de projection.

Proposition 2.16. *La suite suivante est exacte*

$$0 \longrightarrow B^+_{\text{cris},(m)} \xrightarrow{\delta_m} C_m \xrightarrow{\pi_m - \rho_m} D_m \longrightarrow 0$$

Démonstration.

- $*$ L'injectivité de δ_m s'obtient immédiatement sur la dernière composante obtenue.
- $*$ Intéressons-nous à la surjectivité de l'application $\pi_m - \rho_m$. Pour ce faire, considérons $y = (y_0, \dots, y_{m-1}) \in D_m$. Considérons x_m un élément de $B^+_{\text{cris},(m)}$, alors pour i parcourant $m-1$ à 0 on construit $x_i \in B^+_{\text{cris},(i)}$ tel que $x_i = \rho_{i,i+1}(x_{i+1}) + y_i$. On a donc construit $x = (x_0, \dots, x_m)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $(\pi_m(x) - \delta_m(x))_i = x_i - \rho_{i,i+1}(x_{i+1}) = y_i$.
  On a donc obtenu la surjectivité de l'application.
- $*$ Montrons maintenant $\mathrm{Im}(\delta_m) = \ker(\pi_m - \rho_m)$.
  - $\subseteq$: Soit $y \in \mathrm{Im}(\delta_m)$, il existe $x \in B^+_{\text{cris},(m)}$ tel que $y = (\rho_{0,m}(x), \dots, \rho_{m,m}(x))$, alors $(\pi_m - \rho_m)(y) = (\rho_{0,m}(x), \dots, \rho_{m-1,m}(x)) - (\rho_{0,1}(\rho_{1,m}(x)), \dots)$
    Or pour tout $m' \geq m$, $\rho_{m',m'+1} \circ \rho_{m'+1,m} = \rho_{m',m}$, ainsi on obtient que

$$\begin{aligned}\rho_m(y) &= (\rho_{0,1}(\rho_{1,m}(x)), \dots, \rho_{m',m'+1}(\rho_{m'+1,m}(x)), \dots, \rho_{m-1,m}(\rho_{m,m}(x)))\\ &= (\rho_{0,m}(x), \dots, \rho_{m',m}(x), \dots, \rho_{m-1,m}(x))\\ &= \pi_m(y)\end{aligned}$$

donc $y \in \ker(\pi_m - \rho_m)$.

$\supseteq$: Soit $y = (y_0, \dots, y_m) \in \ker(\pi_m - \rho_m)$, alors

$$(y_0, \dots, y_{m-1}) = (\rho_{0,1}(y_1), \rho_{1,2}(y_2), \dots, \rho_{m-1,m}(y_m))$$

Ainsi, on obtient que pour tout $i \leq m-1$, $y_i = \rho_{i,m}(y_m)$ et $y_m = \rho_{m,m}(y_m)$, et on peut donc écrire $y = \delta_m(y_m)$ et donc $y \in \operatorname{Im}(\delta_m)$.

■

Pour montrer le point $ii)$, on est donc ramené à montrer qu'en notant

$$C = \varprojlim_m C_m \simeq \prod_m B^+_{\text{cris},(m)},$$

et $\rho = \varprojlim_m \rho_m : C \to C$, que $\rho - Id : C \to C$ est surjective.

Définition 2.17. Pour $x \neq 0$ élément de $B^+_{\text{cris},(m)}$, on pose $v(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{x \in p^n A_{\text{cris},(m)}\}$ et $||x|| = p^{-v(x)}$.

Remarque 2.18. $||\cdot||$ définit une norme sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $B_{\text{cris},(m)^+}$ tel que $(B^+_{\text{cris},(m)}, ||\cdot||)$ soit complet.

Proposition 2.19. *Pour tout* $m' \leq m$, $||\rho_{m',m}|| \leq 1$.

Démonstration. Soit $x \in B^+_{\text{cris},(m)}$, on peut donc écrire $x = p^{v(x)}y$ avec $y \in A_{\text{cris},(m)}$. Comme $x \in p^{v(x)}A_{\text{cris},(m)}$, alors $\rho_{m',m}(x) \in p^{v(x)}A_{\text{cris},(m')}$ et donc $v(x) \leq v(\rho_{m',m}(x))$, ce qui permet de conclure que $||\rho_{m',m}(x)|| \leq ||x||$ et par suite $||\rho_{m',m}|| \leq 1$. ■

Définition 2.20. Considérons $\eta < 1$, et posons

$$E_\eta := \left\{ x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C, \eta^{-m}||x_m|| \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$

on définit pour $x \in E_\eta$, $||x||_{E_\eta} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \eta^{-m}||x_m||$.

Proposition 2.21. $||\cdot||_{E_\eta}$ *est une norme sur* E_η.

Démonstration. Par définition de E_η, pour $x \in E_\eta$, la suite $(\eta^{-m}||x_m||)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée, ce qui permet de bien définir $||x||_{E_\eta}$. Le fait que ce soit une norme suit directement du fait que $||\cdot||$ est une norme sur $B^+_{\text{cris},(m)}$. ■

Proposition 2.22. $(E_\eta, ||\cdot||_{E_\eta})$ *est un espace de Banach stable par* ρ *et tel que* $||\rho|| \leq \eta$

Démonstration.

— On commence par démontrer le caractère complet. Considérons $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E_η, on note pour tout $k \in \mathbb{N}, x_k = (x_{k,j})_{j\in\mathbb{N}} \in C$. Soit $\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0, ||x_n - x_m||_{E_\eta} \leq \varepsilon$, ce qui revient à dire que pour tout $j \in \mathbb{N}, \eta^{-j}||x_{n,j} - x_{m,j}|| \leq \varepsilon (*)$. On a donc à j fixé que $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $B^+_{\text{cris},(j)}$ qui est complet pour $||\cdot||$, ainsi il existe $x_j \in B^+_{\text{cris},(j)}$ tel que $x_{n,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_j$. En posant alors $y = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, en faisant tendre m vers l'infini dans $(*)$ on a obtenu qu'il existe $\tilde{n}$ tel que $\forall n \geq \tilde{n}, \forall j \in \mathbb{N}, \eta^{-j}||x_{n,j} - x_j|| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $||x_n - y|| \leq \varepsilon$, ce qui permet de conclure.

— Soit $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in E$, alors $\rho(x) = \varprojlim_m \rho_m(x) = (\rho_{0,1}(x_1), \rho_{1,2}(x_2), \rho_{2,3}(x_3), \dots)$ et donc par la proposition 2.19, on tire

$$\begin{aligned}\eta^{-m}||\rho(x)_m|| &= \eta^{-m}||\rho_{m,m+1}(x_{m+1})|| \\ &\leq \eta^{-m}||x_{m+1}|| = \eta^{-(m+1)}||x_{m+1}|| \times \eta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Ainsi E_η est stable par ρ et par l'inégalité précédente on tire que

$$||\rho(x)||_{E_\eta} \leq \eta ||x||_{E_\eta}$$

■

Remarque 2.23. On déduit donc que $Id - \rho$ est inversible sur E_η est donc surjective.

Remarque 2.24. On commence par rappeler des descriptions explicites de B^+_{dR} et B^+_{cris} se trouvant par exemple dans [Ber02a] :

$$\begin{aligned}B^+_{dR} &= \varprojlim_n (W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q})/(\ker(\theta))^n = \left\{ x = \sum_{n\geq 0} x_n\xi_0^n, x_n \in W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}\right\} \\ &\simeq \mathbb{C}_p[[t]] \text{ où } t = \log([\varepsilon])\end{aligned}$$

et se rappelant que $\ker(\theta) = (\xi_0)$,

$$B^+_{\text{cris}} = \left\{ x \in B^+_{dR}, x = \sum_{n\geq 0} x_n \frac{\xi_0^n}{n!}, x_n \to 0 \text{ dans } W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}\right\}$$

On en déduit une description explicite pour tout m de $B^+_{\text{cris},(m)}$:

$$B^+_{\text{cris},(m)} = \left\{ x \in B^+_{dR}, x = \sum_{n\geq 0} x_n \frac{\xi_0^n}{\left\lfloor \frac{n}{p^m}\right\rfloor !}, x_n \to 0 \text{ dans } W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}\right\}$$

On observe ainsi $B^+_{\text{cris},(m)}$ est inclus dans B^+_{dR} et comme $W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}$ est dense dans B^+_{dR} qui est sa complétion $\ker(\theta)$-adique, alors $W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}$ est dense dans $B^+_{\text{cris},(m)}$ pour tout m.

Corollaire 2.25. $\mathrm{Id} - \rho : C \to C$ *est surjective.*

Démonstration. Étant donné $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in C$, comme pour tout m, $W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}$ est dense dans $B^+_{\text{cris},(m)}$, et que $\rho_{m,m+1}(W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}) = W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q}$, alors

$$W(\mathcal{O}^\flat_C)\otimes\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{Im}(\rho_{m,m+1}) \subseteq B^+_{\text{cris},(m)}$$

et par densité, on a $\overline{\mathrm{Im}(\rho_{m,m+1})} = B^+_{\mathrm{cris},(m)}$. Cela permet de construire par récurrence une suite $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}} \in C$ tel que $y_0 = 0$, et vérifiant

$$||(x_m - y_m) + \rho_{m,m+1}(y_{m+1})|| \leq \eta^{2^m}.$$

Cela assure que $x' = (x_m - y_m + \rho_{m,m+1}(y_{m+1}))_{m\in\mathbb{N}} \in E_\eta$, or comme $\mathrm{Id} - \rho$ est surjective sur E_η, il existe $z \in E_\eta$, $x' = z - \rho(z)$. Or

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} - \rho)(\underbrace{y + z}_{\in C}) &= y + z - \rho(y + z) \\
&= (y - \rho(y)) + (z - \rho(z)) \\
&= y - \rho(y) + x' \\
&= x \quad \text{(par définition de } x'\text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Id} - \rho : C \to C$ est surjective.

■

Bibliographie

[BO78] Pierre Berthelot et Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* English. T. 21. Math. Notes (Princeton). Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978. DOI : 10.1515/9781400867318.

[Ill79] Luc Illusie. "Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline". French. In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 12 (1979), p. 501-661. ISSN : 0012-9593. DOI : 10.24033/asens.1374. URL : https://eudml.org/doc/82043.

[Fon82] Jean-Marc Fontaine. "On certain types of p-adic representations of the Galois group of a local field; construction of a Barsott-Tate ring." French. In : *Ann. Math. (2)* 115 (1982), p. 529-577. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.2307/2007012.

[Fon83] Jean-Marc Fontaine. *Cohomologie de De Rham, cohomologie cristalline et representations p- adiques. (De Rham cohomology, crystalline cohomology and p-adic representations).* French. Algebraic geometry, Proc. Jap.-Fr. Conf., Tokyo and Kyoto 1982, Lect. Notes Math. 1016, 86-108 (1983). 1983.

[IR83] Luc Illusie et Michel Raynaud. "Les suites spectrales associées au complexe de De Rham-Witt". English. In : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 57 (1983), p. 73-212. ISSN : 0073-8301. DOI : 10.1007/BF02698774. URL : https://eudml.org/doc/103990.

[Ber02a] Laurent Berger. *An introduction to the theory of p-adic representations.* 2002. arXiv : math/0210184 [math.NT]. URL : https://arxiv.org/abs/math/0210184.

[Ber02b] Pierre Berthelot. *Lettre de Berthelot à Nekovar.* 2002.

[Ser04] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux.* French. 4th corrected ed. Paris : Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, 2004. ISBN : 2-7056-1296-3.

[Car19] Xavier Caruso. "An introduction to p-adic period rings". In : *An excursion into p-adic Hodge theory : from foundations to recent trends.* Sous la dir. de Société Mathématique de France. T. 54. Panoramas et Synthèses. 2019. URL : https://hal.science/hal-02268787.

[Ber14] Pierre Berthelot. *D-modules arithmétiques I., Opérateurs différentiels de niveau fini.* 1995-06-14. URL : https://www.wstein.org/people/berthelo/publis/D-Modules_Arithmetiques_I.pdf (visité le 05/04/2025).